الفصل الثاني

حلّ المشكلات في تعليم الرياضيّات

يتضمّن تعليم الرياضيّات عادةً في البلدان كافةً حلّ المشكلات. ولكن موقع حلّ المشكلات في مناهج الرياضيّات وطرائق استخدام حلّ المشكلات في تعليم الرياضيّات تتباين أو تتوافق، بين بلدٍ وآخر، وداخل البلد الواحد، تبعاً لاختلاف أو توافق، توجّهات المناهج وخلفيّات المعلّمين ونظرتهم إلى الرياضيّات وتعليم الرياضيّات.

نحاول في هذا الفصل، المستند إلى الأدبيّات ونصوص بعض مناهج وكتب الرياضيّات، التعرّف إلى أهداف تعليم حلّ المشكلات وأنواع المشكلات المستخدمة وكيفيّة استخدام حلّ المشكلات في تعليم الرياضيّات.

وقبل التعريف بموقع حلّ المشكلات في تعليم الرياضيّات وعرض بعض الاستخدامات الأكثر شيوعاً لا بد من رسم الإطار المرجعي الذي ترتكز إليه هذه الاستخدامات.

١) الإطار المرجعي

برغم صعوبة الإحاطة بالإطار المرجعي الذي يستند إليه تعليم حلّ المشكلات يمكننا تحديد توجّهين أساسيّين يساعدان في رسم

هذا الإطار. من جهة، هناك معرفة متراكمة في الأدب التربوي أو مستندة إلى خبرة منقولة عبر أجيالٍ متعاقبة، ومن جهة ثانية هناك النظريّة البنائيّة واستتباعاتها في تعليم الرياضيّات.

يمكننا أن نستدلّ إلى المعرفة المتراكمة المتعلّقة بحلّ المشكلات من مسوِّغات تعليم حلّ المشكلات التي نجدها في الأدبيّات. هذه المسوّغات يمكن أن تدرج في إطار المبرّرات الأربعة التالية (Blum & Niss, 1991; Pehkonen, 1997):

١) تكوين الفرد: حلّ المشكلات ينمّي المهارات الذهنيّة (التفكير النقدي، الإبداع، القدرة على حلّ المشكلات) والاستعدادات (الانفتاح، الثقة بالنفس، ...).

٢) إظهار فائدة الرياضيّات: حلّ المشكلات يظهر فائدة الرياضيّات في مختلف مجالات الحياة في المجتمع (الاجتماعيّة، الاقتصاديّة، الثقافيّة، ...) ودور الرياضيّات كخادم للعلوم الأخرى.

٣) إظهار صورة الرياضيّات: حلّ المشكلات يبرز كنشاط أساسي في الرياضيّات ويظهر غناها وقوّتها ووحدتها من خلال عمل مبادئها وطرائقها في مجالات مختلفة ومتنوّعة داخل الرياضيّات وخارجها.

٤) التحفيز على تعلّم الرياضيّات: حلّ المشكلات يزيد من دافعيّة التلاميذ لتعلّم الرياضيّات.

فيما يتعلّق بالفهم البنائي لتعليم الرياضيّات نعرض بإيجاز للنظريّة البنائيّة وما تستتبعه في مجال حلّ المشكلات في تعليم الرياضيّات.

البنائيّة أساساً نظريّة في المعرفة والتعلّم وليست نظريّة في التعليم. وهي ترتكز على المبادئ التالية:

١) الذاتيّة (Subjectivity) والفائدة (Utility) هما خاصّتان أساسيّتان من خصائص المعرفة. فالمعرفة التي يمتلكها شخص ما، ليست تمثيلاً لحقيقة موضوعية مستقلّة موجودة خارجه، تقترب منها أو تبتعد عنها. إنها بناء شخصي، قابل للحياة طالما يخدم انجاز مهمةٍ أو تحقيق هدف، تمّ اختياره (Glasersfeld, 1991; 1994).

٢) التعلّم ليس نتيجة للتلقي السلبي لمعرفة ينقلها المعلّم، إنما ينتج عن التفاعل النشط مع بيئة تتضمّن موضوعاً معرفياً، وربما، معلّماً وتلاميذ. فهو حصيلة إعادة التنظيم المتوازن للبنى الذهنيّة من خلال عمليّات التأقلم التي حدّدها بياجه: الاستيعاب (Assimilation) والملاءمة (Accommodation). الاستيعاب هو عمليّة إدخال الموضوع المعرفي في البنى الذهنيّة الموجودة والملاءمة هي المحاولة التي يقوم بها المتعلّم لتوفيق هذه البنى مع الموقف الجديد (Piaget, 1936; 1975). ويساعد التفاعل الاجتماعي على التعلّم وذلك من خلال الصراع الفكري الاجتماعي والتفاوض على المعاني (Glasersfeld, 1994; Laborde, 1994).

٣) يرتبط التعلّم بالسياق الذي يحصل فيه وبالمعارف والتجارب السابقة للمتعلّم (Kerka, 1997).

تتعدّد المقاربات التعليميّة التي ترتكز على البنائيّة. وهي تقوم غالباً على تنظيم وضعيّات تعليميّة تأخذ بعين الاعتبار التجارب السابقة للمتعلّم، وتحمل إمكانيّة نشوء صراع فكري اجتماعي، وتتيح التواصل والتعبير عن الانبناءات الفرديّة. وفيما يتعلق بتعليم

الرياضيّات، نجد مقاربات بنائيّة متنوّعة (Ishii, 2003)، نشير من بينها إلى المقاربة البنائيّة الاجتماعيّة التي تركّز على المبادئ الثلاثة التالية (Ernest, 1994):

١) احترام المعاني التي تتشكّل عند المتعلّم واحترام تجاربه السابقة. فبدلاً من فرض ممارسةٍ خطابيّة في تعليم رياضيّات مدرسيّة شكليّة جديدة كلّياً على التلميذ، وهي ممارسة تتجاهل قيمة المعارف من خارج المدرسة، فإن التعليم البنائي يجب أن يبني على هذه المعارف.

٢) البناء على طرائق المتعلّم من خلال التفاوض على المعاني. ويمكن من أجل ذلك، على سبيل المثال، أ) تنظيم وضعيّات ديداكتيّة تسمح للتلاميذ بتطوير خوارزميّاتهم الخاصة لحلّ المشكلة ثم، من خلال النقاش، مقارنة هذه الخوارزميّات وتصنيفها بالنسبة إلى الخوارزميّة الأنسب، ب) إتاحة الفرصة للتلاميذ ليطوّروا تمثيلاتهم ورموزهم، ج) الاعتراف بشكل صريح بوجود بعض الاعتباطيّة في بعض التعاريف الرياضيّة وتبرير الخيارات المعتمدة، د) التشديد على عدم ضرورة وجود طريقة «صحيحة» أو جواب «صحيح» في حلّ بعض المشكلات، تماماً كما في بعض التجارب الأدبية مثلاً.

٣) عدم الفصل بين الرياضيّات وتطبيقاتها. يجب أن لا يفصل التعليم الأدوات الرياضيّة عن استخداماتها. ويمكننا أن نتناول المبادئ والطرائق والأدوات الأخرى على ضوء، أ) الظروف التاريخيّة والثقافيّة التي ظهرت فيها والمسائل التي تخدمها، ب) استخداماتها الشائعة وتطبيقاتها، ج) سياقات استخدامها المرتبطة مباشرة بحياة التلاميذ واهتماماتهم.

ومن الواضح أن تعليماً كهذا يفترض دوراً جديداً للمعلّم (Roh, 2003; Ishii, 2003):

١) كمصمّم ومحضّر وضعيّات تعليميّة تسمح للتلاميذ أن يستندوا إلى خبراتهم السابقة مما يستوجب تحليلاً للمهارات اللازمة والتمثيلات البسيطة التي يقوم بها التلاميذ.

٢) كميسِّر ومنظِّم ومشرِف على التعلّم وليس كملقّن. فهو يحفّز ويدعم وينظّم العمل كما يسهّل إدارة النقاش واستخلاص النتائج.

من وجهة نظر بنائيّة، التعليم الذي يقتصر على حفظ الحقائق والقواعد والخوارزميّات وتطبيق الإجراءات الروتينيّة، محكوم بالفشل. ولحلّ المشكلات موقع مركزي في بناء المعارف الرياضيّة وفي النشاط الرياضي نفسه. فهو في الوقت نفسه موضوع ووسيلة للتعلّم. وفي كلا الحالين تكون المواقف-المشكلات في قلب البيئة التعليميّة المعدّة للتلاميذ.

٢) حلّ المشكلات في مناهج الرياضيّات والكتب المدرسيّة

نحاول في هذا القسم، المستند إلى الأدبيّات ونصوص مناهج الرياضيّات وكتب الرياضيّات في بعض الدول، التعرّف إلى الموقع الذي يحتلّه حلّ المشكلات في تعليم الرياضيّات وأصناف المشكلات والمسائل التي يتم استخدامها في إطاره.

حلّ المشكلات في مناهج الرياضيّات

نكتفي هنا بمناهج الرياضيّات في لبنان وفي بعض البلدان

الأخرى (الولايات المتّحدة، كندا، فرنسا) لما لها من تأثير مميّز على تعليم الرياضيّات في لبنان والدول العربيّة. نحاول إبراز المعنى الذي تعطيه هذه المناهج لحلّ المشكلات في تعليم الرياضيّات كما نعرض لأهداف حلّ المشكلات في هذه المناهج.

١) حلّ المشكلات في مناهج الرياضيّات في الولايات المتّحدة

وضع المجلس الوطني لمعلّمي الرياضيّات في الولايات المتّحدة مبادئ ومعايير لمناهج الرياضيّات في الولايات المتّحدة (NCTM, 2000). ومن المعايير أن مناهج الرياضيّات يجب ان تركّز على حلّ المشكلات كجزء أساسي من تعلّم الرياضيّات، وتمكّن جميع التلاميذ من أن:

- يبنوا معارف رياضيّة جديدة من خلال عملهم على حلّ المشكلات
- ينمّوا استعداداتهم الرياضيّة كالتعبير والتمثيل والتجريد والتعميم في وضعيّات من داخل الرياضيّات ومن خارجها
- يطبّقوا استراتيجيّات مختلفة لحلّ المشكلات ويكيّفوها مع وضعيّات جديدة
- يراقبوا تفكيرهم الرياضي خلال حلّ المشكلات ويتفكّروا فيه.

٢) حلّ المشكلات في مناهج الرياضيّات في فرنسا

تركّز هذه المناهج (MENESR, 2004, p. 5) على أن فهم المعارف الرياضيّة وامتلاكها يرتكزان على نشاط التلميذ لذلك يجب أن يعطى هذا النشاط الأولويّة. ومن أجل ذلك، وعندما يكون ذلك

ممكناً، يجب اختيار مواقف - مشكلات، أي مواقف تنطوي على مشكلة حلّها يستدعي أدوات، أي تقنيات أو أفكاراً مكتسبة سابقاً، من أجل اكتشاف أو استيعاب أفكار جديدة. وإذا كان حلّ المشكلات يسمح بالوصول إلى تكوين معارف جديدة فإنه أيضاً، وسيلة مميّزة لتوسيع معانيها والتمكّن منها.

والمواقف المختارة يجب أن:

- تأخذ بعين الاعتبار الأهداف الموضوعة لها، والدراسة المسبقة للمعارف التي قد تنشأ عنها وكذلك المعارف السابقة للتلاميذ وتصوّراتهم المتعلّقة بالمعارف المستهدفة،
- تسمح بانخراط جميع التلاميذ فيها أي أن لا تتضمّن إلا تعليمات بسيطة وأن لا تتطلّب، في بدايتها، إلا معارف مترسّخة عند جميع التلاميذ،
- تؤدّي سريعاً إلى مشكلة غنيّة بما يكفي لإطلاق التخمينات،
- تجعل من الممكن تناول المعارف أو الطرائق المستهدف تعلّمها، ثم تداول صيغ للتعبير عنها،
- توفّر للتلاميذ، طالما يكون ذلك ممكناً، فرصاً لمراقبة نتائج عملهم مع تشجيعهم على إغناء هذه النتائج. ويمكن التوصل إلى هذا الأمر بتضمين المواقف مقاربات مختلفة تتيح للتلاميذ القيام بمقارنات مثمرة.

٣) حلّ المشكلات في مناهج الرياضيّات في كندا

يعتبر حلّ المواقف- المشكلات محور الأنشطة الرياضيّة كما هو في أنشطة الحياة اليوميّة. ويمكن ملاحظة ذلك من زاويتين: من جهة فهو يعتبر كسيرورة، لذلك يجري التركيز على مهارة حلّ

المشكلات، ومن جهة أخرى، فهو خيار تربوي يدعم غالبيّة مقاربات التعلّم في مادّة الرياضيّات. (MEQ, 2004, p. 231)

وتتوقّع هذه المناهج أن يكون التلميذ في نهاية المرحلة المتوسّطة قادراً على أن (MEQ, 2004, p. 24):

- يحلّ مواقف - مشكلات تتصّل بحقل أو أكثر من حقول الرياضيّات وتتضمّن معلومات متعدّدة،
- يستدعي، بصوابيّة، طرائق تمثيل مختلفة تتنوّع من موقف لآخر تبعاً للسياق،
- يستخدم بشكلٍ صحيح شبكات المفاهيم والعمليّات الرياضيّة المستهدفة،
- يضع حلاً (طريقة ونتيجة) مستخدماً استراتيجيّات مختلفة، ويتأكّد من الحلّ، ويوصله إلى آخرين مستخدماً بشكلٍ جيد اللغة العاديّة واللغة الرياضيّة.

٤) حلّ المشكلات في مناهج الرياضيّات في لبنان

هنا يجري الحديث عن حلّ المسائل بدل الحديث عن حلّ المشكلات. وقد تكون هذه المناهج تستخدم كلمة «مسائل» بمعنى مشكلات. وتعتبر هذه المناهج أن «حلّ المسائل الرياضيّة قد يكون النشاط الأكثر دلالة في تعليم الرياضيّات. فمن جهة يجري التركيز على أن تبنى كل معرفة رياضيّة جديدة انطلاقاً من مسألة مطروحة، ومن جهة ثانية يجري التشديد على أن يتعلّم الطالب استخدام خطط مختلفة كي يتجاوز الصعوبات ويتوصّل إلى حلّ مسألة ما. لهذا يجب أن يكون قادراً على أن: يسلسل، يصنّف، يكمّم، يوجد النماذج الرياضيّة، يمارس تقنيّات المحاكاة، يبني ويستخدم

الخوارزميّات، يتخّذ القرارات، يتحقّق، يطبّق، يقيس، يستعمل التقنيّات الاستكشافية، يعالج المعلومات.» **(المركز التربوي للبحوث والإنماء، ١٩٩٧، ص. ٢٠٥)**

من الواضح أن نصوص المناهج في الدول الأربع تعطي دوراً مركزيّاً لحلّ المشكلات في تعليم الرياضيّات وتعتبر حلّ المشكلات (حلّ المسائل في لبنان) من جهة وسيلة لتعلّم معارف جديدة ومن جهة أخرى، مهارة يجب اكتسابها وتنميتها. ولكن ما تجدر ملاحظته أن المناهج اللبنانيّة، في تفاصيل أهداف المراحل التعليميّة، تبدو أقل تركيزاً على تعلّم استراتيجيّات حلّ مختلفة وعلى إدارة الحلّ.

المشكلات والمسائل في كتب الرياضيّات

نعرض باختصار لأبرز أصناف المسائل المتداولة في إطار حلّ المشكلات في الكتب المدرسيّة والدراسات محاولين التعرّف على خصائصها وفئاتها، وكذلك على وجهة استخدامها التربوي.

بورازي (Borasi, 1986) وضعت لائحة بأمثلة عن مشكلات، وأصناف أخرى شائعة مرتبطة بها، وردت في كتب مدرسيّة ومقالات وتقارير بحثيّة وفي سياقات أخرى تتناول حلّ المشكلات (ملحق رقم ١). وقد صنّفت هذه الأمثلة في سبع فئات: تمرين (Exercise)، مسألة كلاميّة (Word problem)، أحجية (Puzzle)، برهنة حدسيّة (Proof of a conjecture)، مسألة من الواقع (Real-world problem)، موقف إشكالي (Problematic situation) وموقف (Situation).

وبنتيجة دراسة هذه الأمثلة من حيث خصائص بناها الأربع: السياق (Contexte) أي الموقف الذي تظهر فيه المشكلة، الصيغة

(Formulation) أي التعريف الصريح بالمهمّة المطلوبة، مجموعة الحلول المقبولة، وطرق الحلّ الممكنة، حدّدت خصائص هذه الفئات (ملحق رقم ٢).

ومن حيث وجهة الاستخدام التربوي للمسائل في الكتب المدرسيّة بيّنت دراسة أجريت على الكتب المدرسيّة في الصين أن مجموعات المسائل التي تضمّنتها يمكن تصنيفها في ست فئات هي (Li, 1998):

١. المسائل التي تساعد التلاميذ على فهم المبادئ والشروط والنتائج المتعلّقة بقضيّة (Proposition) جديدة،
٢. المسائل التي تساعد التلاميذ على التآلف مع المعادلات الرياضيّة (Formula) والقواعد والمهارات الجديدة، (المسائل من الفئتين ١. و٢. تأتي عادةً تحت عنوان «تمارين» وهي الأبسط وتعتبر أساسيّة)
٣. مسائل برهنة تتطلّب من التلاميذ تطبيق المعرفة الجديدة (مبادئ، قضايا ومعادلات)،
٤. مسائل تتطّلب من التلاميذ تطبيق المعرفة الجديدة والمعرفة السابقة، وهي تشكّل غالبيّة ما يندرج تحت باب «مسائل»،
٥. مسائل عامة تتطلّب من التلاميذ استخدام معارف متعدّدة ومتنوّعة. هذه المسائل قليلة وغالباً ما تدرج في باب «مسائل مراجعة» (Review problem)،
٦. مسائل تهدف إلى تحضير التلاميذ لمتابعة قضايا متّصلة بالمعرفة الجديدة. هذه المسائل قليلة وتدرج عادةً في باب «مسائل».

ونجد هذه الأصناف أيضا، مع اختلافات بسيطة، في أغلبيّة

الكتب المدرسيّة كما في كتاب المركز التربوي للسنة السادسة من التعليم الأساسي إذ تتوزّع مجموعات المسائل فيه كما يلي (CNRDP, 1998, p. 7-8):

- مسائل للتذكير والتمرين لترسيخ المعارف الجديدة، تندرج في باب «تمارين»،
- مسائل لتطبيق المعارف الجديدة والمعارف القديمة، تندرج في باب «مسائل»،
- مسائل عامة، تندرج في باب «زاوية اللعب».

٣) استخدامات حلّ المشكلات في تعليم الرياضيّات

عرف تعليم الرياضيّات أشكالاً متعدّدة من استخدامات حلّ المشكلات. وإذ يمكننا تصنيف هذه الاستخدامات في أغلبيّتها في باب المقاربات التعليميّة الخاصة بتنمية مهارة حلّ المشكلات فإن هناك استخدامات يمكن اعتبارها مقاربات تعليميّة تدخل في باب استخدام حلّ المشكلات كطريقة تعليم. وهي مقاربات متأثرة بالنظريّة البنائيّة للتعلّم نراها تتكاثر وتتوسّع في المدارس مع زيادة انتشار المفاهيم البنائيّة فيها، وهي غالباً ما تستخدم المشكلات المفتوحة.

حلّ المشكلات كهدف للتعليم

يرتبط تعليم الرياضيّات تقليدياً بحلّ المشكلات من خلال المسائل الكلامية أي المسائل الرياضيّة المصاغة بلغة غير رياضيّة. ويجري حلّ المسائل الكلاميّة عادةً بالطريقة المنمذجة من المعلّم. يقوم المعلّم أمام التلاميذ بحلّ المسألة ويعرض أمامهم مراحل الحلّ

ثم يقوم التلاميذ بالتمرّن على الطريقة من خلال حلّ بعض المسائل المشابهة. وغالباً ما تكون هذه المسائل من المسائل المجموعة في آخر الدرس بهدف استخدام المعارف والقواعد والمبادئ الأساسية التي تكون قد وردت فيه.

إلى جانب هذه الطريقة التقليديّة نجد أحياناً مقاربات مختلفة في تعليم حلّ المشكلات يمكننا وضعها في فئتين: الفئة الأولى من هذه المقاربات تقوم على تعليم استراتيجيّات حلّ، ولكنها غالباً ما تبقى مقتصرة على المسائل الكلامية. والفئة الثانية لا تقتصر فقط على تعليم استراتيجيّات حلّ وإنما تتبعها بتعليم مساعِدات في إدارة الحلّ وضبطه.

تعليم استراتيجيّات حلّ

الاستراتيجيّات التي يجري تعليمها عادةً هي استراتيجيّات عامة كاستراتيجيّة «اخترعه» (أنظر لاحقاً) ولكن هناك أيضا استراتيجيّات خاصة ببعض الميادين كاستراتيجيّة «جرّب أعداداً ثم عمّم» (أنظر لاحقاً) لحلّ المشكلات الجبريّة.

استراتيجيّة «اخترعه»

تقوم هذه الاستراتيجيّة على البناء الرباعي المراحل لبوليا مع التركيز على استعراض الخيارات الممكنة والمشكلات المشابهة واستخدام الرسوم والصور وهي تعتمد المراحل الست التالية في حلّ المشكلات، وقد أخذت اسمها من الحروف الأولى منها:

١) أوضح المشكلة (المعطيات، المطلوب، ...)

٢) خيارات ممكنة

٣) تذكّر مشكلات مشابهة

٤) رسوم وصور للحلّ

٥) عمليّات وإجراءات

٦) هل هذا هو الحلّ ؟ عودة إلى الوراء للتدقيق والتأكد.

المشكلة:

يقوم تمثال الحرية على قاعدة مربّعة الشكل. كل ضلع من القاعدة طوله ٦٥ قدماً. ما محيط القاعدة؟

الحلّ باعتماد الطريقة:

المحيط يعني طول مجمل حدود مساحة ما. وعليَّ معرفة طول مجمل حدود القاعدة. إذا بدأتُ من نقطة ما ومشيتُ حدود القاعدة حتى أصل إلى النقطة التي بدأتُ منها وجمعتُ مجمل ما مشيت أكون قد عرفتُ المطلوب (أوضح المشكلة).

بما أن القاعدة مربّعة الشكل يمكنني أن أجمع طول الأضلع الأربعة أو أن أضرب طول الضلع بأربعة (خيارات ممكنة).

أتذكّر أني قمتُ بحلّ مشكلة مشابهة الأسبوع الماضي عندما قمتُ بقياس غرفة نومي ولكن لم يكن شكلها شكلاً مربّعاً (تذكر مشكلات مشابهة).

يمكنني رسم صورة ولكني أعرف تماماً شكل المربّع (رسوم وصور).

باستطاعتي الآن إجراء الحساب: ٤ × ٦٥ = ٢٦٠ (عمليّات وإجراءات).

يبدو أني لم أخطئ في الحساب ويمكنني التأكّد من صحة الجواب بجمع الأضلع الأربعة. الجواب ذاته. عظيم. (هل هذا هو

الحلّ ؟ عودة إلى الوراء للتدقيق والتأكد). (Hohn & Frey, 2002)

استراتيجيّة «جرّب أعداداً ثم عمّم»

إنها في الواقع استراتيجيّة يمكن أن تكون واسعة الاستخدام في الرياضيّات. يمكن على سبيل المثال استخدامها في حل المشكلة التالية: «ما مجموع الأعداد الطبيعيّة ١، ٢، ٣، . . .، ن؟» ويمكننا أيضا استخدامها لترجمة مشكلة إلى معادلة جبريّة (Kutscher & Linchevski, 1997). وتقضي هذه الطريقة بتسجيل نتائج تجريب بعض الأعداد كحلول ثم التعميم باستخدام الرموزالجبريّة. الجدول رقم ٤ يظهر كيف يمكن الحصول على المعادلة الجبريّة للمشكلة التالية: «اشترى سامي ثلاث كرات و١٢ قميصاً لفريقه الرياضي بثمن ٢٤٣ دولاراً. سعر الكرة أقل بست دولارات من سعر القميص. ماهو سعر الكرة وما هو سعر القميص؟»

سعر الكرة	سعر القميص	سعر ٣ كرات	سعر ١٢ قميص	المجموع	هل المجموع يساوي ٢٤٣ دولاراً؟
١٠	١٠ - ٦ = ٤	٣×١٠ = ٣٠	١٢×٤ = ٤٨	٣٠+٣٨	لا
١٤	١٤ - ٦ = ٨	٣×١٤ = ٤٢	٨×١٢ = ٩٦	٤٢ + ٩٦	لا
					.
					.
س	س - ٦	٣ × س	١٢×(س-٦)	٣× س+١٢× (س -٦)	نعم
المعادلة هي: ٣ × س+ ١٢ × (س - ٦) = ٢٤٣					

جدول رقم ٤ : جدول استراتيجيّة «جرّب أعداداً ثم عمّم»

استراتيجية المحاولة والخطأ

تركّز هذه الاستراتيجيّة على المراحل الأربع التالية التي تلي مرحلة فهم المشكلة (Laing, 1985):

١) اكتب إجاباتك عن السؤالين التاليين: ماذا نعرف؟ ما المطلوب منا؟

٢) اعطِ جواباً تراه معقولاً،

٣) اختبر هذا الجواب باستخدامه مكان المطلوب في المشكلة،

٤) حسِّن جوابك ما دمت ترى ذلك ضرورياً، إلى أن تصل إلى جواب ملائم.

المشكلة:

لتشجيعه على حلّ مسائل رياضيّة وعد رجل ابنه أن يدفع له ٨٠٠٠ ل. ل. عن كل مسألة يحلّها بشكل صحيح. ولكنه في المقابل يغرّمه بمبلغ ٥٠٠٠ ل.ل. عن كل مسألة لا يحلّها بشكل صحيح. بعد قيام الابن بحلّ ٢٦ مسألة تبيّن أن ليس لأي من الاثنين شيء عند الآخر. كم مسألة حلّها الابن بشكل صحيح؟

الحلّ باعتماد الاستراتيجية:

ماذا نعرف؟ نعرف أن الإبن حلّ ٢٦ مسألة وله ٨٠٠٠ ل.ل. عن كل مسألة حلّها بشكل صحيح وعليه ٥٠٠٠ ل.ل. عن كل مسألة لم يحلّها بشكل صحيح. كما نعرف أن مجمل ما له مساوٍ لمجمل ما عليه.

المطلوب: عدد المسائل التي حلّها الابن بشكل صحيح.

إجابة معقولة: عدد المسائل التي حلّها بشكل صحيح= ٧.

اختبار الجواب: عدد المسائل التي حلّها بشكل صحيح= ٧.
عدد المسائل التي لم يحلّها بشكل صحيح= ٢٦-٧= ١٩.

ما له: ٧ × ٨٠٠٠ = ٥٦٠٠٠. ما عليه: ١٩ × ٥٠٠٠= ٩٥٠٠٠. بما أن ما له لا يساوي ما عليه فالعدد ٧ ليس الجواب المناسب الذي يجب أن يكون أكبر من ٧.

إجابة معقولة: عدد المسائل التي حلّها بشكل صحيح= ١٣.

اختبار الجواب: عدد المسائل التي حلّها بشكل صحيح= ١٣.
عدد المسائل التي لم يحلّها بشكل صحيح= ٢٦-١٣= ١٣.

ما له: ١٣ × ٨٠٠٠ = ١٠٤٠٠٠. ما عليه: ١٣ × ٥٠٠٠= ٦٥٠٠٠. بما أن ما له لا يساوي ما عليه فالعدد ١٣ ليس الجواب المناسب الذي يجب أن يكون أكبر من ٧ وأقل من ١٣.

إجابة معقولة: عدد المسائل التي حلّها بشكل صحيح= ١٠.

اختبار الجواب: عدد المسائل التي حلّها بشكل صحيح= ١٠.
عدد المسائل التي لم يحلّها بشكل صحيح= ٢٦-١٠= ١٦.

ما له: ١٠ × ٨٠٠٠ = ٨٠٠٠٠. ما عليه: ١٦ × ٥٠٠٠= ٨٠٠٠٠. بما أن ما له يساوي ما عليه فالعدد ١٠ هو الجواب المناسب.

استراتيجيّة الربط بالمسائل المشابهة

يقوم تعليم هذه الاستراتيجيّة في حلّ المشكلات على تطوير التخطيطات العقليّة (Schèmes cognitifs) للمسائل المختلفة الموجودة عند المتعلّم. ونقصد بالتخطيطة العقليّة بنية معرفيّة تتضمّن قواعد عمل وإدارة تقود عمليّة حلّ مسألة من نوع معيّن (Piaget, 1936).

إنطلاقاً من أن المراحل الأساسيّة في حلّ المشكلات هي: فهم معنى المشكلة، إنتاج صورة ذهنيّة عن المشكلة، ربط هذه الصورة بالتخطيطات العقليّة الموجودة، وضع خطة حلّ، يركّز تعليم هذه الاستراتيجيّة على المراحل الأربع التالية (Philippou & Christou, 1999):

١) مرحلة التعرّف

٢) مرحلة البلورة (Elaboration)

٣) مرحلة التخطيط

٤) مرحلة التنفيذ.

مرحلة التعرف: التعرّف على العناصر الأساسية للمشكلة وخصائصها هو الخطوة الأهم في التعرّف على التخطيطة العقليّة الملائمة للمشكلة. فلا بدّ إذاً من التعرّف بدايةً إلى القصة أو الموقف المشابه في الصور العقليّة. وتتضمّن بنية كل فئة من المسائل بعض الأوجه التي تتردّد في عدد من المواقف والمسائل المتشابهة. هدف هذه المرحلة هو مساعدة التلاميذ على تنمية المعارف والمهارات الأساسيّة الداخلة في عمليّة التعرّف هذه.

مرحلة البلورة: في هذه المرحلة تجري مناقشة خصائص المشكلة ومقارنتها بخصائص فئات المسائل المشابهة كما يتم إبراز التفاصيل والخصائص المميّزة لكل فئة والتعبير عنها بعبارات التلاميذ الخاصة. باختصار في هذه المرحلة تتم عمليّة تحديد فئة المسائل المشابهة والملائمة للمشكلة المطروحة وبلورة الاختلافات معها.

مرحلة التخطيط: يتم في هذه المرحلة تحديد التخطيطات العقليّة المعروفة الأكثر ملاءمةً للمشكلة المطروحة والتعديلات التي

يجب إدخالها عليها لتتوافق مع متطلبات حلّ هذه المشكلة. ويجري وضع سلسلة العمليّات اللازمة للوصول إلى الحلّ.

مرحلة التنفيذ: وتقتضي تنفيذ العمليّات الداخلة في التخطيطات العقليّة المعدّلة. وهذه العمليّات تقوم، في حالة المسائل الكلاميّة، على عمليّات الجمع والطرح والضرب والقسمة بالإضافة إلى العمليّات المنطقية والعمليّات الحسابيّة الأخرى.

المشكلة:

بيع حاسوب محمول في عرض خاص بسعر ٢٠٠٠ دولار من ضمنه قيمة ال١٠٪ لضريبة القيمة المضافة. ما سعر هذا الحاسوب، بالدولار الصحيح، من دون ضريبة القيمة المضافة؟

الحلّ باعتماد الاستراتيجيّة

مرحلة التعرّف:

فلنحاول التعرّف على العناصر الأساسيّة للمشكلة وخصائصها. القصة التي يجري سردها في المشكلة هي من قصص البيع والشراء. ومن عناصرها الرئيسيّة ما يلي:

١) السعر الأساسي قد خضع لضريبة.
٢) الضريبة معروفة كنسبة مئويّة من السعر الأساسي.
٣) قيمة الضريبة محسوبة من ضمن سعر المبيع.
٤) سعر المبيع معروف.
٥) المطلوب: السعر الأساسي قبل إضافة قيمة الضريبة.
٦) المطلوب: إعطاء السعر بالدولار الصحيح.

مرحلة البلورة:

أتذكّر مسألة مشابهة تتعلّق ببيع قميص في موسم التنزيلات قمنا

بحلّها منذ فترة. المسألة هي التالية: قميص سعره ٣٦ دولارا معروض للبيع في موسم التنزيلات مع حسم بنسبة ١٥٪. كم يصبح سعره بعد الحسم؟

على الرغم من بعض الشبه، تختلف هذه المسألة عن المشكلة المطروحة علينا في بعض عناصرها الأساسيّة. ففي حين أن المسالة التي حلَلناها سابقاً فيها حسم يستدعي طرح قيمته من السعر الأساسي ففي المشكلة المطروحة اليوم هناك ضريبة يجب إضافة قيمتها إلى السعر الأساسي. يبدو أن هناك مسألة قمنا بحلّها سابقاً هي أقرب إلى مشكلة اليوم وهي التالية: اشترت ماريّا همبرغر بثمن ٠,٩٠ دولاراً وقنينة كوكا بثمن ٠,٣٠ دولاراً. إذا كانت ضريبة المبيعات المحليّة ٥٪، كم يرد المحاسب لها إذا أعطته دولارين؟

أتذكّر أنه عندما قمنا بحلّها حسبنا الضريبة وزدناها على الثمن الأساسي. ولكن هنا أيضاً يوجد اختلاف. فالمبلغ الأساسي في المسالة الراهنة ليس معروفاً.

مرحلة التخطيط:

يمكننا إذاً اعتبار مسألة ماريّا الأكثر ملاءمة للمشكلة المطروحة والتعديلات التي يجب إدخالها عليها لتتوافق مع متطلّبات حلّ المشكلة الراهنة تقتصر على الانطلاق من سعر أساسي نعتبره معقولاً، ١٨٠٠ دولاراً، واعتماد طريقة المحاولة والخطأ.

مرحلة التنفيذ:

انطلاقاً من مبلغ أساسي قيمته ١٨٠٠ دولاراً تكون قيمة الضريبة المضافة ١٨٠٠ × ١٠ ÷ ١٠٠= ١٨٠ دولاراً ويكون السعر بما فيه قيمة الضريبة المضافة ١٩٨٠ دولاراً وهو أقل من ٢٠٠٠ دولار.

وهذا يعني أن المبلغ الأساسي يجب أن يكون أكبر من ١٨٠٠ دولار. فلنأخذ مثلاً ١٨٢٠ دولاراً. ولنضف إليه قيمة الضريبة المضافة في هذه الحال أي ١٨٢ دولاراً. عندها يكون المبلغ الإجمالي ٢٠٠٢ دولاراً أي أكبر مما هو فعلاً بقليل. مع افتراض المبلغ الأساسي يساوي ١٨١٩ نصل إلى مبلغ إجمالي قيمته ٢٠٠٠,٩ بينما مع ١٨١٨ نصل إلى مبلغ إجمالي قيمته ٢٠٠٠,٢. ١٨١٨ دولاراً هو سعر الحاسوب، بالدولار الصحيح، من دون ضريبة القيمة المضافة.

استراتيجيّة «إقرأ واعمل»

القراءة الإجمالية المتمعّنة للنصّ ثم التركيز على المشكلة قد لا تكون كافية. بمعنى آخر، في أغلب الأحيان، لا يكفي تفكيك النصّ ثم تركيبه لحلّ المشكلة. تقوم الاستراتيجيّة التي نحن بصددها على إقامة رابط بين القراءة وبناء صورة ذهنيّة أو فضاء للمشكلة. وتكمن البداية في تحديد الميدان الذي تنتمي إليه المشكلة المطروحة. بعد ذلك تقضي الاستراتيجيّة بأن يقوم التلميذ بقراءة المشكلة مقطعاً مقطعاً ويقوم بالحسابات بعد كل مقطع ليرى ما يمكن أن يحصل عليه. وما إن يصل التلميذ إلى المقطع الأخير حتى تكون قد تراكمت عنده مجموعة من النتائج. يبقى أن نحاول عندئذٍ أن نوجّه هذه النتائج للحصول على المطلوب في المشكلة.

المشكلة: «قامت جمان برحلة على دراجتها فقطعت مسافة ٨٠ كلم بسرعة متوسّطها ٥٠ كلم في الساعة ثم ١٠ كلم بسرعة متوسّطها ٢٥ كلم في الساعة. ما هو متوسّط سرعتها في الساعة في مجمل الرحلة؟»

أحد الحلول: بعد الجملة الأولى «قامت جمان برحلة على دراجتها فقطعت مسافة ٨٠ كلم بسرعة معدّلها ٥٠ كلم في الساعة» ماذا نعرف؟ يمكننا الاستنتاج أن جمان أمضت ١,٦ س. بالإضافة إلى ذلك يمكننا استنتاج عدّة أشياء. مثلاً أنها بهذه السرعة تقطع ٥٠ كلم في ساعة، و١٠٠ كلم في ساعتين و٧٥ كلم في ساعة ونصف. بعد الجملة الثانية «ثم ١٠ كلم بسرعة متوسّطها ٢٥ كلم في الساعة» نستنتج مثلاً أن جمان تقطع بهذه السرعة مسافة ١٠٠ كلم في ٤ ساعات و١٠ كلم في ٠,٤ ساعة. لكي نكمل المهمّة علينا هنا العمل عكسيّاً. من المعلومة التي يمكن استنتاجها بهذه الطريقة، أن المدّة في هذه الرحلة هي ساعتان (١,٦ + ٠,٤)، يستطيع التلميذ الاستنتاج بأن المطلوب يقتضي منه قسمة المسافة الإجماليّة على المدّة الإجماليّة.

ليس الهدف من هذا العمل ترجمة النص رياضيّاً بتقطيعه وإنما ما يشبه بناء فضاء رياضي للمشكلة من خلال تحديد عناصرها والرياضيّات التي ترتبط بهذه العناصر والعلاقات بينها.

هذه الطريقة قد تحتاج إلى وقت ولكنها تعكس عمليّة حلّ المشكلات بصورتها الأصيلة، كصورة مرسومة قطعةً قطعة، عندما تسحب منها قطعة أو يضاف إليها قطعة جديدة يعاد تنظيمها كليّاً. تناقش معاني الكلمات المختلفة كلّها وتستخدم طرق التمثيل الممكنة كلّها ويتم تحديد الرموز بأشكال مختلفة. في بعض الحالات، يتبدّى أن بعض الحسابات التي أجريت غير ملائمة. من الضروري الإشارة هنا إلى أن التلاميذ الذين اعتادوا الحلّ الشكلي للمسائل قد يشتكون من هذا العمل الإضافي.

تعليم مساعِدات لإدارة الحلّ وضبطه

تعليم مساعِدة لإدارة الحلّ

وهي مساعِدة تقوم على إدارة الحلّ في المراحل الأساسيّة الأربع لبوليا (فهم المشكلة، وضع خطة، تنفيذ الخطة، والنظر إلى الوراء) من خلال التساؤل حول مدى الفهم المكوّن عن المشكلة في مختلف مراحل عمليّة الحلّ. وتظهر اللائحة في الإطار رقم ١ بعض الأسئلة التي تستخدم في إطار هذه الاستراتيجيّة (Schurter, 2002). وعادةً ما توضع لائحة بالنصائح في هذا المجال وتعلّق في قاعة الصف فيسترشد بها المعلّم عند تعليمه حلّ المشكلات والتلاميذ عند قيامهم بحلّ المشكلات.

مساعِدة لإدارة الحلّ

١) هل فهمت ما تطلب المشكلة إيجاده؟
٢) هل فهمت بأي مراحلّ يجب أن تمر للوصول إلى الحلّ؟
٣) هل فهمت العلاقات والمعادلات التي تربط عناصر المشكلة؟
٤) هل فهمت كيف تستخدم الرياضيّات التي تتطلّبها المشكلة؟
٥) هل يبدو لك أنك تتبع استراتيجيّة توصلك إلى الحلّ؟
٦) إذا لم تتقدّم في الحلّ فما يمكنك فعله بشكل مختلف؟ ما الذي لا تعرفه وأنت بحاجة لفهمه؟
٧) هل لجوابك معنىً؟ هل يبدو معقولاً؟ هل يمكنك التحقّق منه بطريقة أخرى؟

إطار رقم ١ : بعض الأسئلة التي يمكن طرحها في مختلف مراحل الحلّ

المشكلة: المسافة بين الأرض والمريخ تقدّر بماية وعشرة ملايين كيلومتر. ما المدّة اللازمة لمركبة فضائيّة سرعتها ١٠٠٠٠ م/ث، باليوم الصحيح، للقيام بالرحلة من الأرض إلى المريخ ذهاباً وإياباً؟

إدارة الحلّ باعتماد المساعِدة

١) نعم فهمت ما تطلب المشكلة إيجاده: المدّة اللازمة للقيام بالرحلة من الأرض إلى المريخ ذهاباً وإياباً.

٢) لا أعرف بأي مراحل يجب أن أمر للوصول إلى الحلّ. وهذا ما لا بد من التوقّف عنده الآن. ... الآن عرفت. لا بد أولاً من حساب المدّة ذهاباً بالثانية ثم بالساعة ثم باليوم. ومن ثم يجب ضرب هذه المدّة بالعدد ٢.

٣) العلاقات والمعادلات التي تربط عناصر المشكلة هي كما يلي: ١ كلم= ١٠٠٠ م، ١ س= ٣٦٠٠ ثانية، ١ يوم= ٢٤ ساعة.

٤) الرياضيّات التي تتطلّبها المشكلة هي بشكل رئيسي: المدّة (بالثانية)= المسافة (بالمتر) ÷ السرعة (م/ث).

٥) أعتقد أن حساب المدّة على أساس وحدات القياس المذكورة أعلاه وضربها باثنين ثم الاكتفاء بالعدد الصحيح من النتيجة يشكّل استراتيجيّة توصل إلى الحلّ.

٦) إذا لم أتقدّم في الحلّ يمكنني بدايةً حلّ المشكلة في حالة أبسط، مثلاً: ما المدّة اللازمة لاجتياز مسافة ١٢٠ كلم بسيارة سرعتها ٥٠ كلم بالساعة؟ هنا لا مشكلة والجواب هو ١٢٠ ÷ ٥٠= ٢,٤ س. أعود إلى المشكلة وأحوّل السرعة من م/ث إلى كم/س مع الانتباه إلى أن ١١٠ ملايين كلم= ١١٠ × $(١٠)^{٦}$ كلم وأن

١٠٠٠٠ م/ث = ١٠ × ٣٦٠٠ كلم/س = ٣٦ × (١٠)^{٣} كلم/س. ويمكنني تسهيل الحساب بالاختزال.

٧) الجواب الذي وجدته مع إجراء الحساب بواسطة الآلة الحاسبة هو ٢٥٥ يوم. نعم لجوابي معنىً. إذ يكفي أن نلاحظ أنه بسرعة ٣٦٠٠ كلم في الساعة تقطع المركبة مسافة ٣٦٠٠ × ٢٤ كلم في اليوم أي ما يقارب مليون كلم. فتكون المدّة التقريبيّة لقطع مسافة الرحلة ذهاباً وإياباً، بحدود ٢٢٠ يوماً. من هنا فإن الجواب ٢٥٥ يوماً له معنىً. ومن ناحية أخرى هو نتيجة: ٢ × ١١٠ × (١٠)^{٣} ÷ (٣٦ × ٢٤) والجواب التقريبي هو ٢٢٠ × (١٠)^{٣} ÷ ٩٠٠ أي ٢٢٠٠ ÷ ٩ أي تقريباً ٢٢٠ يوماً. الجواب التقريبي يظهر أن الجواب معقول. يمكنني التحقّق منه بحساب المسافة التي تقطعها المركبة في ٢٥٥ يوم. ٢٥٥ × ٢٤ × ٣٦٠٠٠ يساوي حوالي ٢٢٠ مليون كلم أي المسافة ذهاباً وإياباً.

تجدر الإشارة هنا إلى أن المرء لا يحتاج بالضرورة إلى المرور بكل هذه المراحل وإنما يستخدمها بحسب الضرورة.

مساعِدة لإدارة الحلّ وضبطه

كما في المساعِدة السابقة تشكّل إدارة الحلّ جزءاً أساسيّاً ولكن يجري التركيز هنا بشكلٍ موازٍ على الخطوات والمراحل الإجرائيّة وعلى مساعدات الضبط والتوجيه. والخطوات الإجرائيّة المعتمدة هنا هي: إقرأ لتفهم، صغ المشكلة بكلماتك، عبّر بالرسوم والجداول، ضع خطة حلّ، قدّر الحلّ، نفّذ الحسابات، تأكّد من الحلّ بمجمله.

أما مساعِدات الإدارة المعتمدة هنا فهي: ١) التعلّم الذاتي الذي يساعد التلميذ على التعرّف إلى مكوّنات الحلّ، ٢) التساؤل الذاتي

الموجّه من خلال الحوار مع الذات، ٣) التأكّد الذاتي الذي يشجّع التلميذ على ضبط الحلّ بنفسه. ويقضي تعليم هذه المساعِدة عمليّاً بتدريب التلاميذ، في مجموعاتٍ صغيرة، على الخطوات الإجرائيّة وضبطها بالمساعِدة الثلاثيّة: قل، تساءل، تأكّد.

مساعِدة لإدارة الحلّ وضبطه
اقرأ لتفهم
قل اقرأ المشكلة. إذا لم تفهم أعِد القراءة
تساءل هل قرأتُ وفهمت؟
تأكّد من الفهم.
صِغ المشكلة بكلماتك
قل ضع خطاً تحت المعلومات المهمّة أعِد صياغة المشكلة بكلماتك
تساءل هل وضعتُ خطاً تحت المعلومات المهمّة؟ ما هو المطلوب ؟ كيف أجده؟
تأكّد من أن المعلومات التي وضعتَ تحتها خطاً ملائمة للسؤال
عبّر بالرسوم والجداول
قل عبّر بالرسوم والجداول
تساءل هل ما رسمته يتلاءم مع المشكلة؟
تأكّد أن الرسوم والجداول ملائمة للمعلومات
ضع خطة حلّ
قل قرّر بخصوص عدد المراحل الضروريّة للوصول إلى الحلّ اكتب رموز العمليات (+، ط، -، . . .)
تساءل إذا فعلتُ كذا فعلامَ أحصل؟

إذا فعلتُ كذا فماذا أفعل بعد ذلك؟
ما عدد المراحل الضروريّة؟

تأكّد أن الخطة لها معنىً

قدّر الحلّ

قل دوِّر الأعداد. قم بالحساب في رأسك ودوِّن التقدير

تساءل هل دوَّرتُ إلى الأكبر وإلى الأصغر؟
هل كتبتُ التقدير؟

تأكّد من أنك استخدمت المعلومات المناسبة

نفّذ الحسابات

قل نفّذ العمليات بالترتيب

تساءل كيف تبدو النتيجة مقارنةً بالتقدير؟
هل للجواب معنىً؟
هل الفواصل في محلّها؟

تأكّد أن كل العمليات تمّت حسب الترتيب المقرّر

تأكّد من الحلّ بمجمله

قل تأكّد من الحسابات

تساءل هل تأكّدتُ من كل مرحلّة؟
هل تأكّدتُ من الحسابات؟
هل الجواب لا يتضمّن أخطاء؟

تأكّد أن كل شيء جيّد وإلا عُد إلى الوراء واطلب العون إذا لزم الأمر.

إطار رقم ٢ : نموذج استخدام مساعِدة إدارة الحلّ
وضبطه بالثلاثية : قل، تساءل، تأكّد

المشكلة: عائلة مؤلفة من ٥ أشخاص اشترت ١٣ قميصاً سعر القميص الواحد منها ١٢,٧٥ دولاراً و١٦ سروالاً سعر الواحد منها ٢٨,١٥ دولاراً. ما مجموع ما دفعته؟

الحلّ باعتماد المساعِدة

اقرأ لتفهم

قرأتُ المشكلة وفهمتُها و**تأكّدتُ** من الفهم.

صِغ المشكلة بكلماتك

وضعتُ خطاً تحت المعلومات المهمّة كما يلي: عائلة مؤلفة من ٥ أشخاص اشترت ١٣ قميصاً سعر القميص الواحد منها ١٢,٧٥ دولاراً و١٦ سروالاً سعر الواحد منها ٢٨,١٥ دولاراً. ما مجموع ما دفعته؟

أعدت صياغة المشكلة كما يلي: عائلة اشترت قمصاناً وسراويل بأسعار معروفة. والمطلوب إيجاد مجموع ما دفعته.

كيف أجده؟ أحسب سعر القمصان ثم سعر السراويل ثم المجموع.

المعلومات التي وضعتُ تحتها خطاً ملائمة للسؤال.

عبّر بالرسوم والجداول

ويمكن التعبير عن المشكلة بالجدول رقم ٥:

النوع	العدد	السعر الإفرادي	المجموع
قميص	١٣	١٢,٧٥	
سروال	١٦	٢٨,١٥	
المجوع			

جدول رقم ٥: نموذج عن استخدام جدول للتعبير عن معطيات المشكلة

ما رسمته يتلاءم مع المشكلة وفيه المعلومات الملائمة.

ضع خطة حلّ

عدد المراحل الضرورية للوصول إلى الحلّ: ٣

رموز العمليات: ×، ×، +.

إذا ضربت ١٣ بِ ١٢,٧٥ أحصل على ثمن القمصان.

بعد ذلك أحسب بعملية ضرب مشابهة ثمن السراويل وبعدها أجمع النتيجتان فأحصل على مجموع ما دفعته العائلة. الخطة لها معنى.

قدّر الحلّ

دوّرت الأعداد وقمت بالحساب في رأسي:

اعتمدت التدوير العشري إلى الأعلى فحصلت على: ١٣ × ٢٠ + ١٦ × ٣٠ = ٢٦٠ + ٤٨٠ = ٧٤٠

ثم إلى الأدنى فحصلت على: ١٣ × ١٠ + ١٦ × ٢٠ = ١٣٠+ ٣٢٠ = ٤٥٠

ثم قمت بتقديرأدق بالتدوير العشري إلى الأقرب فحصلت على: ١٣ × ١٠ + ١٦ × ٣٠ = ١٣٠ + ٤٨٠ = ٦١٠.

نفّذ الحسابات

نفّذت العمليّات بالترتيب وحصلت على: ١٦٥,٧٥ + ٤٦٠,٤٠= ٦٢٦,١٥

والنتيجة مقبولة مقارنةً بالتقدير. وللجواب «مجموع ما دفعته العائلة ٦٢٦,١٥ دولاراً» معنىً.

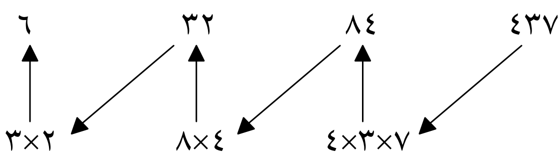
الفواصل في محلّها والعمليّات تمت حسب الترتيب المقرّر.

تأكّدت أن كل شيء جيّد.

حلّ المشكلات كمقاربة تعليميّة

يستخدم حلّ المشكلات كمقاربة تعليميّة متوافقة مع النظرية البنائيّة للتعلّم. وهذه المقاربات التعليميّة في إطار حلّ المشكلات تستخدم لتحقيق أهداف تعلّميّة تتعلق بالمبادئ والإجراءات والطرائق الرياضيّة كما تستخدم أيضاً من أجل مساعدة التلاميذ على التمرّس بمنهجيّة حلّ المشكلات من خلال عملهم الرياضي بدءاً بطرح المشكلات. وهي تستخدم مثلاً من أجل استخلاص مبادئ معيّنة من خلال دروس يقوم فيها التلاميذ بأعمال تقصّي قد تقودهم إلى استكشاف هذه المبادئ وسبر غورها والتعرّف إلى معانيها. فالعمل مثلاً على إيجاد أعداد لها استمرارية عالية كما هو مطلوب في النص التالي يستدعي التقصي:

«استمراريّة العدد ٤٣٧ هي ٣. الرسم التالي يوضح كيفيّة حساب هذه الاستمراريّة.



فتّش عن أعداد استمراريّتها عالية».

والتقصي هنا يبدأ بفهم ما تعنيه الاستمراريّة ثم بمحاولة تعريفها والتعرّف على خصائصها وكل ذلك يستدعي جمع المعلومات ووضع الفرضيّات والتحقّق منها ومحاولة تعميمها.

وإلى جانب التقصي، الذي دخل بشكل واسع في تعليم الرياضيّات في بريطانيا وأصبح شائعاً بعد تقرير كروكفرت في العام ١٩٨٢، هناك أيضاً أشكال مختلفة من استخدام حلّ المشكلات تقوم

على حلّ مشكلات مفتوحة. وقد ظهرت في اليابان في السبعينات من القرن الماضي مقاربة المشكلات ذات النهاية المفتوحة (Open ended problems) لتشجيع النقاش الرياضي. وبدءاً من الثمانينات أصبحت المشكلات المفتوحة تستخدم بأشكال مختلفة ومتنوّعة في العديد من الدول (Pehkonen, 1997). ويشجّع بعض هذه التنوّعات على ابتداع مشاكل وصياغتها من خلال العمل النشط على المعلومات المتوفّرة لديهم لتركيب مشكلات خاصة بهم.

نورد فيما يلي بعض أبرز هذه الاستخدامات.

طريقة المشكلات ذات النهاية المفتوحة

تبعاً لهذه الطريقة يقوم الدرس على طرح مشكلة غير كاملة مما يقتضي وضع مقاربات متنوّعة للحلّ بهدف توفير فرص للتلاميذ تتيح لهم الوصول إلى أشياء جديدة انطلاقاً من المعارف والمهارات والطرائق التي لديهم. ويجري غالباً استخدام أنواع ثلاثة من المشكلات ذات النهاية المفتوحة هي (Becker & Shimada, 1999):

- أ: مشكلات من نوع «جِد»
- ب: مشكلات من نوع «صنِّف»
- ج: مشكلات من نوع «قِس»

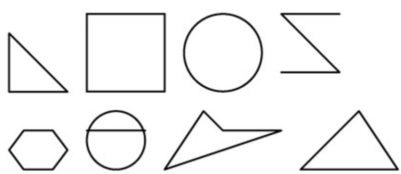
في حالة مشكلة من النوع أ يطلب المعلّم من التلاميذ، مثلاً، أن يجدوا، ما استطاعوا، قواعد أو خصائص تنطبق على مجموعة من الأعداد، كمجموعة الأعداد في الرسم رقم ٧ - أ. في حالة مشكلة من النوع ب يطلب المعلّم من التلاميذ أن يصنّفوا، مثلاً، الأشكال المعطاة في مجموعات تبعاً لخاصة يحدّدونها (الرسم رقم ٧ - ب). وكمثال عن المشكلات من النوع ج يمكننا إعطاء المشكلة

التالية: «رمى كل من ثلاثة أولاد خمس كرات صغيرة تجمّعت طبقاً للأشكال التي تظهرها «الغيوم» الثلاثة في الرسم رقم ٧ - ج. الرابح هو صاحب الغيمة الأكثر انكماشاً. لتحديد الرابح يجب أن نجد طريقة لقياس الغيمة. فكّروا بالوضعيّة من وجهات نظر مختلفة وأعطوا طرقاً مختلفة لقياس انتشار كل غيمة».

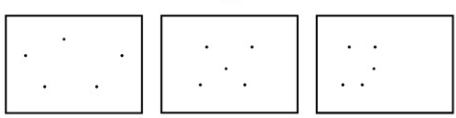
أ

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
٢	٤	٦	٨	١٠	١٢	١٤	١٦	١٨	٢٠
٣	٦	٩	١٢	١٥	١٨	٢١	٢٤	٢٧	٣٠
٤	٨	١٢	١٦	٢٠	٢٤	٢٨	٣٢	٣٦	٤٠
٥	١٠	١٥	٢٠	٢٥	٣٠	٣٥	٤٠	٤٥	٥٠
٦	١٢	١٨	٢٤	٣٠	٣٦	٤٢	٤٨	٥٤	٦٠
٧	١٤	٢١	٢٨	٣٥	٤٢	٤٩	٥٦	٦٣	٧٠
٨	١٦	٢٤	٣٢	٤٠	٤٨	٥٦	٦٤	٧٢	٨٠
٩	١٨	٢٧	٣٦	٤٥	٥٤	٦٣	٧٢	٨١	٩٠
١٠	٢٠	٣٠	٤٠	٥٠	٦٠	٧٠	٨٠	٩٠	١٠٠

ب



ج

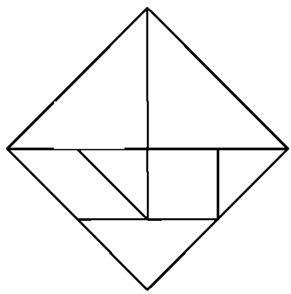


رسم رقم ٧: مجموعات أعداد وصور و«غيوم» يجري العمل عليها ضمن مشكلات ذات نهاية مفتوحة

طريقة الأنشطة المفتوحة

مثلاً، يجري العمل على المشكلة التالية مع تلاميذ الصف السادس على مدى ٣ حصص كل مرّة لمدّة تتراوح بين ١٥ و٢٠ دقيقة:

«سبع قطع تؤلّف الصورة الظاهرة في الرسم رقم ٨.



رسم رقم ٨: صورة مشكّلة من قطع موضوع لنشاط مفتوح

أ. أي من القطع الكبيرة يمكنك تشكيلها بواسطة القطع الصغيرة؟

ب. مساحة المربّع الكبير الذي تشكّله هذه القطع ١٠٠سم^{٢}. ما هي مساحة كل قطعة؟

لنقل أن قيمة مساحة المربّع الكبير بوحدة قياس معيّنة هي ١.
أي كسور تعبر عن مساحات القطع المختلفة؟

ج. كيف يمكن إعادة وضع القطع السبع لتشكيل:

- مثلّث ؟
- مستطيل ؟
- متوازي أضلع ؟

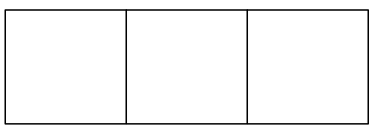
د. أي متعدّدات أضلع أخرى يمكن تشكيلها بالقطع السبع؟»

تجدر الإشارة إلى أن بعض المعلّمين يستخدمون نشاطات معدّة سلفاً ومختبرة بينما يترك البعض الآخر للتلاميذ تحضير أنشطة تعتمد على صورة معطاة.

طريقة «من مشكلة إلى مشكلة»

تقوم الطريقة على نشاطات تستدعي من التلاميذ صياغة مشكلات جديدة، إنطلاقاً من مشكلة معطاة، إما بالتعميم أو بالمشابهة أو بالتضاد ثم يقومون بحلّها. إليكم مثلا من هذه الأنشطة :(Hashimito, 1997)

«شكّلنا بواسطة عيدان الكبريت شبكة من المربّعات (الرسم رقم ٩).



رسم رقم ٩ : صورة شبكة مربّعات من عيدان كبريت موضوع مشكلة تستدعي مشكلات

كم عدد العيدان التي نستخدمها لتشكيل شبكة من ٥ مربّعات؟»

يستطيع التلاميذ وضع عدّة مشكلات بتغيير عدد المربّعات أو الشكل أو الشيئ المستخدم أو غير ذلك.

طريقة «ماذا لو . . . ؟»

هذه الطريقة تتضمّن معاً أوجهاً من المشكلات المفتوحة وأوجهاً من وضع مشكلات. وغالباً ما يتم ذلك بطرح أسئلة من نوع «ماذا لو . . . ؟» و «وإذا كان . . . ؟» و «وإذا لم يكن . . . ؟» بعد الانتهاء من حلّ مشكلة ما.

مثلاً، بعد حلّ المشكلة «برهن أن حاصل ضرب أربعة أعداد متتالية يقسم على ٢٤» يمكن طرح أسئلة تغيّر شروط المشكلة أو هدفها من قبيل: «وإذا كان عندنا ثلاثة أعداد متتالية أو خمسة؟» أو «وإذا كانت الأعداد الأربعة غير متتابعة. هل نستطيع ضمان وجود قاسم؟» أو «هل يمكن ضمان وجود قاسم أصغر؟».