ملحق رقم ١:

أمثلة عن مسائل مستخدمة في كتب مدرسيّة ومقالات

١) اشترت ماريّا همبرغر بثمن ٠,٩٠ دولاراً وقنينة كوكا بثمن ٠,٣٠ دولاراً. إذا كانت ضريبة المبيعات المحليّة ٥٪، كم يرد المحاسب لها إذا أعطته دولارين؟

٢) أصبحتِ في آخر الثلاثينات. أولادكِ يتابعون تعليمهم بنجاح. زوجكِ أصبح في مركز مرموق. وأنتِ يقتلكِ الضجر.

٣) طير وقطار يبعدان ١٥٠ كلم عن بعضهما البعض، يتجّه الواحد منهما نحو الآخر بسرعة ٧٠ كلم/س للطير و ٥٠ كلم/س للقطار. حين يلتقيان يعود الطير إلى الجهة التي أتى منها. فإذا ما وصل إلى نقطة انطلاقه عاد مجدّداً باتجّاه القطار. ويبقى الطير على هذا المنوال تقدّماً وتراجعاً إلى أن يحشره القطار. كم المدّة التي يمضيها الطير في طيرانه قبل أن يحشره القطار؟

٤) السيّدة هانز تنازع الموت بسبب مرض عضال. اكتشف صيدلي دواء يشفيها من مرضها ولكن سعره ليس بمستطاع السيّد هانز فهل يفترض به سرقة الدواء؟

٥) كيف يمكن وضع ٦ عيدان كبريت متساوية الطول لتشكل ٤ مثلّثات متساوية الأضلاع ومتطابقة؟

٦) لنأخذ الثلاثيّات الفيثاغوريّة التالية:

٣	٤	٥	٥	١٢	١٣
٨	١٥	١٧	٧	٢٤	٢٥

... ...

٧) أثبت أن المعادلات أ= ٢ م.ن ب= م^{٢}–ن^{٢} ج= م^{٢}+ن^{٢}
حيث م و ن عددان طبيعيّان تعطي كل الحلول الطبيعيّة للمعادلة
أ^{٢} + ب^{٢} = ج^{٢}.

٨) سيتم تغيير خط الحافلة في بلدتك أو حيك ليؤمّن الخدمة بشكل أفضل. أنت مدعو للمساعدة بصفتك رياضيّاً.

٩) حسب النظريّة الأساسية في علم الحساب، كل عدد طبيعي يمكن كتابته، بطريقة واحدة، كضرب أعداد أوّليّة (بغض النظر عن طريقة ترتيبها). ما تعليقك على الأمر إذا ما بدلنا الضرب بالجمع؟

١٠) احسب ٤ × ٢ + ٦ × ٣.

١١) أثبت أنه عندما تكون الأعداد أ، ب وج مفردة تكون جذور المعادلة أ.س^{٢} + ب.س + ج = صفر غير نسبية.

١٢) يريد آل نلسون فرش غرفة شكلها غير منتظم بالسجاد. لذا يريدون تقدير كمية السجاد المطلوب شراؤه (Borasi, 1986).

ملحق رقم ٢:

خصائص بعض أنواع المسائل المستخدمة في التعليم

النوع	السياق	الصيغة	الحلّ	طريقة الحلّ	أمثلة
تمرين	غير موجود	وحيدة مذكورة بوضوح	غالباً وحيد وصحيح	استخدام خوارزميّات معروفة	١٠
مسألة كلاميّة	كل شيء مذكور بوضوح في النص	وحيدة مذكورة بوضوح	غالباً وحيد وصحيح	استخدام خوارزميّات معروفة	١
أحجية	كل شيء مذكور بوضوح في النص	وحيدة مذكورة بوضوح	غالباً وحيد وصحيح	إعادة صياغة – تبصّر – إيجاد خوارزميّة جديدة	٣ ٥
برهنة حدسيّة	مذكور جزئيّاً في النص. يفترض نظريّات معروفة	غالباً وحيدة مذكورة بوضوح	غالباً وحيد	استكشاف السياق إعادة صياغة وإيجاد خوارزميّة جديدة	٧ ١١
مسألة من الواقع	مذكور جزئيّاً في النص	مذكورة جزئيا في النص وهناك صيغ عديدة ممكنة	حلول عديدة ممكنة غالباً تقريبيّة	استكشاف السياق إعادة صياغة وإيجاد نموذج	٤ ٨ ١٢

موقف إشكالي	مذكور جزئيّاً في النص. إشكالي	غالباً ما يوجد بعض الإشارات الضمنيّة إليها	حلول عديدة ممكنة	استكشاف السياق - إعادة صياغة- طرح مشكلات	٢ ٩
موقف	مذكور جزئيّاً في النص	غير موجودة حتى بشكل ضمني	تحديد مشكلة	طرح مشكلات	٦

(Borasi, 1986)

ملحق رقم ٣:

نماذج لبعض فئات المشكلات المفتوحة

أنشطة تقصي

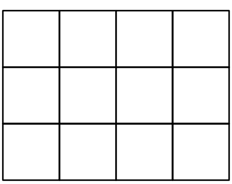
١) الاستمراريّة الجمعيّة للعدد ٤٣٧ هي ٢. الرسم التالي يوضح كيفيّة حساب هذه الاستمراريّة.

٤٣٧   ١٤   ٥

٧+٣+٤   ٤+١

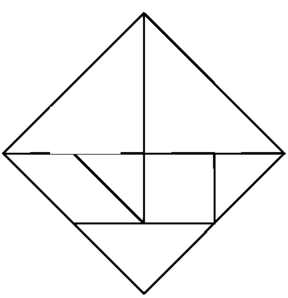
فتّش عن أعداد استمراريّتها الجمعيّة عالية.

٢) كم مربّعاً يوجد في الصورة المقابلة ؟
كم مستطيلاً؟



مشكلات-حقول

٣) سبع قطع تؤلف الرسم التالي:



أ. أي من القطع الكبيرة يمكنك تشكيلها بواسطة القطع الصغيرة؟

ب. مساحة المربّع الكبير الذي تشكّله هذه القطع ١٠٠سم^{٢}. ما هي مساحة كل قطعة؟

لنقل أن قيمة مساحة المربّع الكبير بوحدة قياس معيّنة هي ١ .
أي كسور تعبّر عن مساحات القطع المختلفة؟

ج. كيف يمكن إعادة وضع القطع السبع لتشكيل:
- مثلّث ؟
- مستطيل ؟
- متوازي أضلع ؟

د. أية متعدّدات أضلع أخرى يمكن تشكيلها بالقطع السبع؟

(Pehkonen, 1995)

مشكلات لها تنوّعات

٤) أنتما اثنان في المطعم. تريدان أكل شريحة حلوى مثلّثة الشكل. كيف تقسمانها إلى قطعتين متساويتين ؟
وإذا كنتم ٣؟ وإذا كنتم ٦؟

مشكلات من الحياة الواقعيّة

٥) ما سماكة ورقة من كتاب الرياضيّات الذي تستخدمه؟

٦) رفيق في الصف مريض وأدخل المستشفى. في اجتماع للصف تقرّر أن يعطى كل تلميذ من الصف بطاقة زيارة للرفيق. كما تقرّر أن يتم تحضير هذه البطاقات الصغيرة (بشكل مستطيل طوله ١٥ سم وعرضه ١٠ سم) من قطع كرتون كبيرة (بشكل

مستطيل طوله ٤٥ سم وعرضه ٣٥ سم).
كم قطعة صغيرة يمكننا أن نحضرها من قطعة كبيرة ؟

مشاريع

٧) سمعت أن فترة أيلول ١٩٩٩- آب ٢٠٠٠ كانت أشد السنوات حرارة في الفترة ١٩٦٠–٢٠٠٠. هل هذا صحيح؟

٨) صفكم سينظم ويشارك في «يوم التقدير» في مدرستكم. أنتم مدعوّون ثنائيّا أو ثلاثيّا لتصميم نشاطات تقدير يقوم بها زملاؤكم من الصفوف الأخرى. كل مجموعة سيوضع بتصرفها ما تطلبه من مواد. النشاطات قد تتضمن أن يحزر التلميذ طول تلميذ آخر، أو عدد اللعب في جرة، أو طول قضبان مختلفة، أو وزن كيس بطاطا، أو طول غرفة، أو عدد المرّات التي يمكنه كتابة اسمه في الدقيقة، أو الوقت اللازم لذوبان البوظة.

(NCTM, 1989)

ملحق رقم ٤:

نموذج عن استخدام مشكلة مفتوحة

المشكلة هي التالية: أحد رفاق الصف مريض وهو في المستشفى. اجتمع رفاق الصف وقرّروا أن يعطى كل منهم بطاقة زيارة للمريض. عليكم الآن تحضير بطاقات زيارة صغيرة (بشكل مستطيل طوله ١٥ سم وعرضه ١٠ سم) تقتطعونها من مستطيل كبير (طوله ٤٥ سم وعرضه ٣٥ سم). كم بطاقة صغيرة يمكنكم تحضيرها من المستطيل الكبير؟

طرحت هذه المشكلة على تلاميذ في الصف السادس. وكان يؤمل الوصول، من خلال النقاش، إلى الطريقة الفضلى لحلّ المشكلة. والهدف من العمل على حلّ هذه المشكلة إقناع التلاميذ بأن حلّ المشكلة ليس مجرّد إيجاد عدد كنتيجة لعملية حسابية مناسبة. فيما يلي نقدّم وصفا سريعاً للطريقة التي جرى فيها الدرس:

١) في البداية أعطيت المشكلة من دون شروط كافية، أي من دون القياسات المذكورة بين هلالين في نص المشكلة. ثم جرى شرح المشكلة بواسطة رسم توضيحي لأن بعض التلاميذ لم يفهم المشكلة.

٢) بعد أن بدأ التلاميذ عملهم في حلّ المشكلة طرح المعلّم السؤالين التاليين:

«كيف سنجد الجواب؟»،

«ماذا علينا أن نعرف أولاً؟»

٣) بعد أن تبيّنت الحاجة لمعلومات إضافيّة أعطى المعلّم قياسات القطعة الصغيرة: الطول ١٥ سم والعرض ١٠ سم، وقياسات القطعة الكبيرة: الطول ٤٥ سم والعرض ٣٥ سم.

٤) بعد أن انطلق التلاميذ في عملهم مع تفاوت في التقدّم، جرت متابعة الجميع تبعاً للتقدّم الذي حقّقه كل منهم:

- للذين لم يستطيعوا إيجاد الجواب أعطى القياسات الأبسط التالية: الطول ٤٠ سم والعرض ٣٠ سم.
- للذين وجدوا الجواب أعطى قياسات أكبر مثل: الطول ٧٠ سم والعرض ٦٠ سم.
- جرى الاهتمام بشكل فردي بالتلاميذ الذين لم يسجّلوا أي تقدّم في الحلّ.

٥) بعد أن أنهى التلاميذ حساباتهم قاموا بشرح الحلّ في حالة الطول ٤٥ سم والعرض ٣٥ سم.

إليكم بعض العينات من الحسابات التي أجراها التلاميذ:

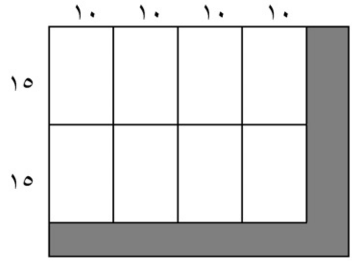
(٣٥ × ٤٥) ÷ (١٥ × ١٠) = ١٠,٥

(٧ × ٩) ÷ (٣ × ٢) = ١٠,٥

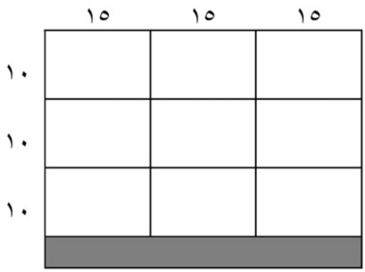
والنتيجة في كلتا الحالتين كانت: ١٠ قطع.

٦) بعد أن أعطى التلاميذ ١٠ كجواب بعد إجراء الحسابات، زوّدهم المعلّم بالورق بالقياسات المحددة طالباً تحضير البطاقات عمليّاً. تفاجأ التلامذة وارتبكوا خاصّةً عندما وجدوا فقط ٨ أو ٩ بطاقات صغيرة فقط (أنظر الرسمين ١ و٢) مما

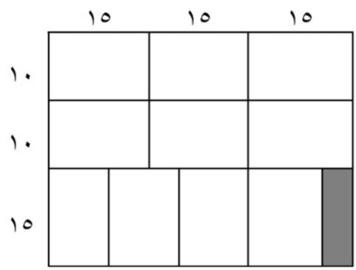
يناقض الجواب الذي وجدوه حسابيّاً. ولكن في النهاية حصل بعض التلاميذ على ١٠ قطع (أنظر الرسم رقم ٣).



الرسم رقم ١



الرسم رقم ٢



الرسم رقم ٣

(Nohda, 1995)

ملحق رقم ٥:

نماذج عن سياقات غير روتينيّة لحلّ المشكلات

١) سياق القصص

مثلاً، قراءة قصة أولاد في عمر خمس سنوات كانوا قد بدأوا في أكل قطع من قالب الكاتو عندما بدأ الزوار يتوافدون، يمكن من إثارة أسئلة وأجوبة انطلاقا من أنه كلما زاد عدد الموجوين تناقص عدد القطع لكل منهم.

٢) سياق الأحجيات

مثلاً، تخيّل أن عليك أن تدفع ا (دولار) ثمن الحرف أ ، و ٢ (دولار) ثمن الحرف (ب)، و ٣ (دولار) ثمن الحرف ت، وهكذا دواليك، و ٢٨ (دولار) ثمن الحرف ي.

كم يكلّفك اسمك؟

جد بعض الكلمات التي تكلّف ١٠٠ دولار.

جد أغلى الكلمات التي تستطيع. (Stacy, 1995)

٣) من خلال الحزازير

مثلاً، أنا عدد طبيعي. ضعف العدد الذي يليني ٤٠٠. من أكون؟

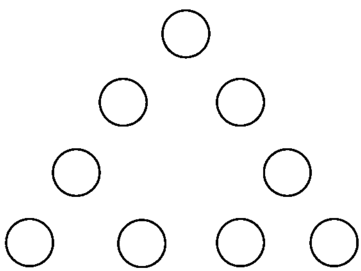
ملحق رقم ٦:

نماذج لمشكلات رياضيّة ملائمة لاستراتيجيّات معيّنة

المحاولة والخطأ

١) ما هو العدد الذي يساوي مربّعه ٢٦٨,٩٦؟

٢) املأ المثلّث في الصورة التالية بالأرقام ١-٩ بحيث يبلغ مجموع كل ضلع ١٧ .



استخدام الرسوم والتمثيلات

٣) نحن اليوم في الثلاثاء بتاريخ ٩ أيلول (September) ٢٠٠٣ . ما تاريخ اليوم الذي يقع بعد ٦٥ يوماً وفي أي يوم من الأسبوع يقع؟

٤) ما عدد المستطيلات التي تحويها شبكة الشطرنج؟

البدء بحلّ مشكلة أبسط

٥) ماعدد عيدان الكبريت اللازمة لتشكيل شبكة مربعة ١٠٠×١٠٠؟

٦) ما مجموع زوايا تساعيّ الأضلاع؟

الحلّ عكسيا

٧) أنا عدد طبيعي. ضعف العدد الذي يليني ٤٠٠. فمن أكون؟

٨) اكتب عدداً من ١٠ أرقام يخبر الأول فيه عن عدد الأصفار فيه، والثاني عن عدد ال ١، ...، والأخير عن عدد التسعات.

التفتيش عن نموذج

٩) ما قياس زاوية في متعدّد أضلع منتظم؟

١٠) ما مجموع الأعداد المفردة الألف الأولى؟

نماذج إضافيّة لمشكلات رياضيّة ملائمة لاستراتيجيّة معيّنة

المحاولة والخطأ

١١) جِد أصغر عدد أولي أكبر من ٨٤٠؟

١٢) جِد الأعداد من ٣ أرقام (ق م ر) التي تستوفي الشرط التالي: قمر=(قم)^{٢}. (Musser and Shaughnessy, 1980)

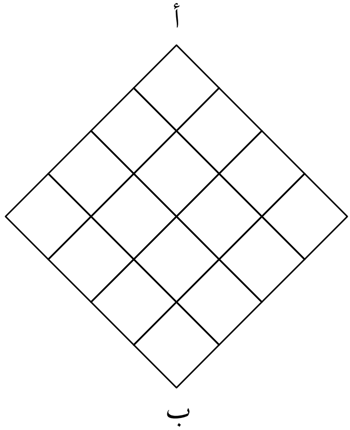
استخدام الرسوم والتمثيلات

١٣) ما عدد فرق المجموعات الرباعيّة المختلفة التي يمكن تشكيلها في صف من ١٢ تلميذاً؟

١٤) في صف من ٣٠ تلميذاً ٢٤ يجيدون الكرة الطائرة و ١٠ يجيدون كرة السلة و٤ لا يجيدون أياً من اللعبيتن. كم عدد التلاميذ الذين يجيدون اللعبتين معا؟

البدء بحلّ مشكلة أبسط

١٥) ما عدد طرق «النزول» من أ إلى ب؟



١٦) جد حصيلة ضرب متعدّدتي الحدود التاليتين:

(١–س) و (١ + س + س^٢ + س^٣ + ... + س^١٠٠)

الحلّ عكسيّاً

١٧) فيما يلي وصف للعبة يلعبها اثنان. احدهما يعطي عدداً ومن ثم يقومان تباعاً، كلٌّ بدوره، بطرح عدد منه من رقم واحدٍ يختاره، إلى أن يصبح أحدهما في دوره أمام الصفر ويكون الخاسر. كيف تستطيع الربح إذا بدأت أنت الطرح؟

١٨) كتب رامي واثنان من رفاقه من اليمين إلى اليسار كلٌّ بدوره، رقماً رقماً وحين أنهى رامي دوره كانوا قد وصلوا إلى العدد ٩٧٣٨٢٦٧١٢٥٧ . ما هي الأرقام التي كتبها رفاق رامي؟

(Musser and Shaughnessy, 1980)

التفتيش عن نموذج

١٩) ما العددان التاليان؟ ١ ٤ ٣ ٦ ٥ ٨ .؟. .؟.

٢٠) ما ميزة رقم العشرات في قوى العدد ٣؟ في قوى العدد ٥؟ ٧؟ ٩؟

ملحق رقم ٧: حلول مختلفة للمشكلة

Prove that $|tanx + cotx| \geq 2$

1. $$\left|\tan x + \cot x\right| = \left|\tan x + \frac{1}{\tan x}\right| \geq 2$$

because $\forall y$, $|y + 1/y| \geq 2$ since $(y-1)^2 \geq 0$

2. $$\left|\tan x + \cot x\right| = \left|\tan x + \frac{1}{\tan x}\right| = \left|\frac{1+\tan^2 x}{\tan x}\right| \geq 2$$

because $1+\tan^2 x - 2\tan x \geq 0$

3. $$\left|\tan x + \cot x\right| = \left|\frac{2}{\sin 2x}\right| \geq 2$$

4. the function f defined on $R-\{k\,\pi/2;\ k\in Z\}$ by $f(x)= \left|\tan x + \cot x\right|$ is periodic of period π, and admits a relative minimum 2 on $]-\pi/2; \pi/2[$ at $-\pi/4$ and $\pi/4$.

5. If for a certain real number x, $\left|\tan x + \cot x\right| < 2$ then $|\sin 2x| > 1$. Impossible.

6. If we consider a trigonometric circle, $f(x)= \left|\tan x + \cot x\right| = AT + BC$ (for $0 < x \leq \pi/4$)

OR BC=DM and AT=ME.

So $f(x)=DE \geq 2\ OM=2$

7. f(x)=BC+AT

= BN+NC+AT

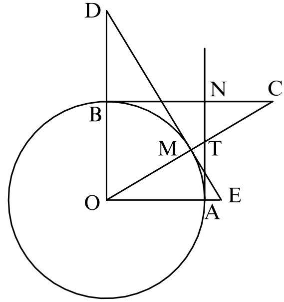
≥ BN+NT+AT

because NC≥ NT

because OA≥ AT

So f(x) ≥ BN + NA

And f(x) ≥ 2.

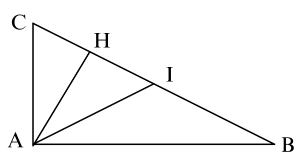


8. f(x) ≥ 2 ⇔ DE ≥ 2 ⇔ d(D,E) ≥ 2 ⇔ (analytical expression of DE with respect to $(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$) ≥ 2 ⇔ ….

9. f(x) ≥ 2 ⇔ DE ≥ 2 ⇔ Area of triangle DOE ≥ 1 ⇔ Area under DE ≥ 1

$$\Leftrightarrow \int_0^a h(x)dx \geq 1 \Leftrightarrow \ldots$$, h(x) being the analytical expression of straight line DE with respect to $(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ and a the abscissa of E.

10. (for 0 <x<π/2) if ABC right angled triangle such that angle ABC=x,



$$f(x)=\frac{AC}{AB}+\frac{AB}{AC}=\frac{AC^2+AB^2}{AB\times AC}=\frac{BC^2}{AB\times AC}$$

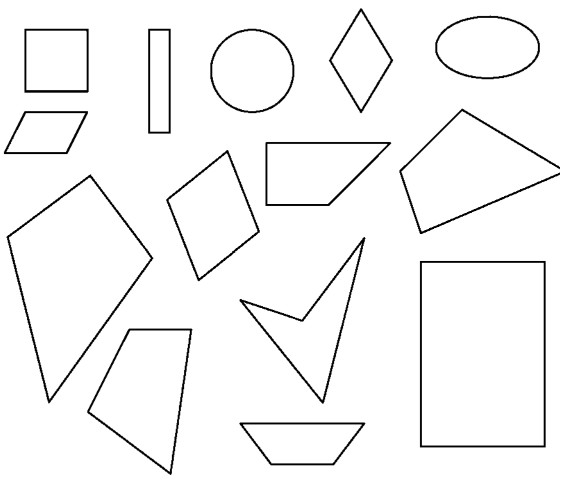
$$=\frac{BC^2}{AH\times BC}=\frac{BC}{AH}=\frac{2\times AI}{AH}\geq 2$$

AH and I being the height relative to BC and the midpoint of BC.

ملحق رقم ٨:

نماذج أنشطة تعليميّة للمرحلة الابتدائيّة
قائمة على حلّ المشكلات بهدف مقاربة معارف جديدة

١) كل تلميذ بدوره يتناول رباعي أضلع من المجموعة المعروضة ويضعه في إحدى الفئتين: متوازي الأضلع، غير متوازي الأضلع. بعد ذلك يسأل التلاميذ عن خصائص متوازي الأضلع وتجري مناقشتها.



٢) كل تلميذ بدوره يضع تحت يده ١٣ كرة بلورية صغيرة ومن دون أن ينظر إليها يظهر عدداً منها باليد الأخرى. ويسأل «هل تستطيع تخيل كم بقي من الكرات تحت يدي؟». بعد ذلك يطلب من التلاميذ إعلان استراتيجيّاتهم المختلفة.

ملحق رقم ٩:

نماذج أنشطة تعليميّة في المرحلة المتوسّطة قائمة على حلّ المشكلات بهدف مقاربة معارف جديدة

٣) رسم تلاميذ الصف السابع جميع المستطيلات التي طولها وعرضها عددان صحيحان ومحيط كل منها ٢٤ سم. ما هي قياسات هذه المستطيلات؟ أي من هذه المستطيلات له أكبر مساحة؟

٤) ما هو أكبر قاسم مشترك للعددين ٦٠ و ٨٤؟

٥) كيف يتغيّر المستقيم الذي يمثل المعادلة ص= أس + ب عندما نغيّر قيمة أ ونترك قيمة ب ثابتة؟ وكيف يتغيّر المستقيم الذي يمثل المعادلة ص= أس + ب عندما نغيّر قيمة ب ونترك قيمة أ ثابتة؟

٦) بهدف مقاربة العناصر الأساسيّة للمثلّث وخصائصها يمكن طرح المشكلة التالية: «ضع على ورقة من الكرتون ثلاث نقط أ، ب وج غير موجودة على خط واحد. واجمع بمستقيم كل اثنين من هذه النقاط.

أ. اذكر العناصر التي يمكن تناولها في المثلّث أ ب ج.

ب. اقطع الصورة أ ب ج من الورقة وارسم على ورقة أخرى

ثلاث قطع مستقيمات كل منها مساو لضلع منه. قارن كل ضلع مع مجموع وفرق الضلعين الآخرين. ما الاستنتاج الذي توحي به النتائج؟

ت. اقطع من الرسم كلاً من الزوايا الثلاث وضعها على الورقة جنبا إلى جنب. ما الذي يبدو ممكناً قوله عن مجموع زوايا المثلّث؟»

٧) المشكلة التالية قد تسمح للتلاميذ بالتعرف على الطرق المختلفة في استخدام النسبة: «ربح فريق كرة سلة ٤٨ مباراة من ٨٠ لعبها. كم من المباريات الخمسين التالية المقبلة عليه أن يربح حتى يحافظ على نسبة الربح ذاتها». (NCTM, 2000)

٨) لتعميق معارف التلاميذ في مجال النسب والتناسبيات التي اكتسبوها في الصفين السادس والسابع يمكن استخدام المشكلة التالية: «في الأسابيع القليلة الماضية أدخلت شركة دور السينما أ. م. س. على مراكز السناك فيها نوعين من العصير. فقدّمت دارا سينما عصير التفاح والموز لمدّة ثلاثة أسابيع في حين قدّمت خمس دور أخرى عصير المانغا والليمون لمدة أسبوعين. وقد كانت كل دار تقدّم نوعاً واحداً من العصير، والأفلام ذاتها وعليها الإقبال ذاته من الجمهور. وكانت نتيجة الحملة بيع ٦٦٠ صندوقاً من عصير التفاح والموز و٨٠٠ صندوق من عصير المانغا والليمون. لنفترض أن الشركة طلبت منك مساعدتها في تحديد صنف الكوكتيل الأكثر مبيعا. استخدم المعلومات للتقرير بهذا الشأن شارحاً بوضوح ما استندت إليه في إعطاء جوابك». (NCTM, 2000)

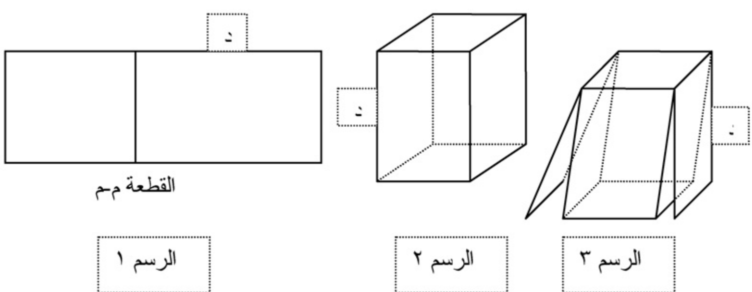
٩) «على ورقة مخططة عامودياً وأفقياً طول مربّعاتها سم واحد، أظهر كل الأشكال التي لها مساحة ١٤ سم^{٢} ومحيط ٢٤ سم بحيث يكون فيها كل مربّع في كل شكل ترسمه يشترك بضلع منه على الأقل مع مربع آخر». (NCTM, 2000)

١٠) يمكن مثلاً متابعة مشكلة إيجاد العلاقة بين المربّعات المبنيّة على القطر وضلعي الزاوية القائمة في المثلث القائم الزاوية بأسئلة من نوع: «هل العلاقة تبقى قائمة إذا بنينا أشكالاً من غير المربّعات مثل المثلّثات المتساوية الأضلاع؟ أو المسدسات المنتظمة؟ أو أنصاف الدائرة؟». (NCTM, 2000)

ملحق رقم ١٠:

نماذج أنشطة تعليميّة في المرحلة الثانويّة قائمة على حلّ المشكلات بهدف مقاربة معارف جديدة

١١) بأربع قطع كرتون من النوع م–م (مربّع–مستطيل) الذي يظهره الرسم ١ يمكننا صنع علبة (قائمة الزوايا) قاعدتها مربّعة وارتفاعها د (الرسم ٢). يكفي من أجل ذلك، لصق المربعين لكل زوج من القطع الأربعة وطي كل قطعة على الضلع المشترك بين المربّع والمستطيل ومن ثم وضع زوجي القطع بالوضع المناسب للحصول على علبة غير مقفلة (الرسم ٣) ومن ثم مقفلة (الرسم ٢).



١) جِد طول ضلع القاعدة المربّعة للعلبة ذات ارتفاع ٨ سم وسعتها ١ ل.

٢) جِد طول ضلع المربّع في القطعة م-م في كل من الحالات التالية للارتفاع د ومساحة القطعة م:

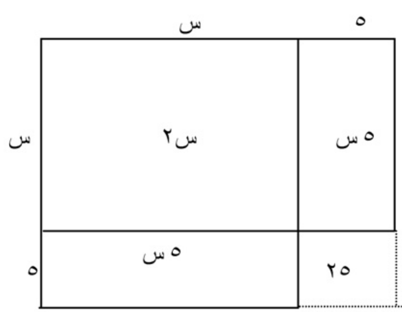
أ. د=١سم ؛ م=٢سم^{٢}.

ب. د=١سم ؛ م=٤سم^{٢}.

ج. د=١٠سم ؛ م=٣٩سم^{٢}.

٣) طول الضلع في الحالة ج من السؤال السابق هو حلّ للمعادلة س٢ + ١٠ س = ٣٩ يمكن إيجاده بطريقة الخوارزمي: «خذ نصف الأشياء، هنا ١٠، واضربه بنفسه فتحصل على ٢٥. اجمعه إلى ٣٩ فتحصل على ٦٤. خذ جذره، الذي هو ٨ واطرح منه نصف الأشياء ٥، فيبقى ٣. هذا هو جذر المربّع الذي تريد».

التبرير الهندسي لطريقة الخوارزمي يبيّنه الرسم التالي.



وبلغة الجبر اليوم يكون التبرير كما يلي:

(س+٥)٢ = س٢+ ١٠س+٢٥

= ٣٩ + ٢٥

= ٦٤

أي : س+٥=٨

و س=٣

جِد بطريقة الخوارزمي طول الضلع في الحالة :

د=٣سم ؛ م=٤سم^{٢} .

٤) **جِد طول ضلع القاعدة المربّعة للعلبة التي ارتفاعها ١ سم ومجموع مساحتها ١٢٥ سم.^{٢}**

٥) **جِد الأعداد الحقيقية س التي تحقّق المعادلة : ٢ س٢ + ٤ س - ١٢٥ =٠**

٦) **هل تستطيع إيجاد الأعداد س التي تحقّق أ س٢ + ب س + ج =٠ حيث أ، ب و ج أعداد حقيقيّة؟ كيف؟**

١٢) كيف يتغيّر الرسم البياني للمعادلة ص= أ س٢ + ب س + ج عندما نغيّر قيمة أ ونترك قيم كل من ب وج ثابتة؟ وكيف يتغيّر هذا الرسم البياني عندما نغيّر قيمة ب ونترك قيم أ و ج ثابتة؟ وعندما نغيّر قيمة ج ونترك قيم أ و ب ثابتة؟

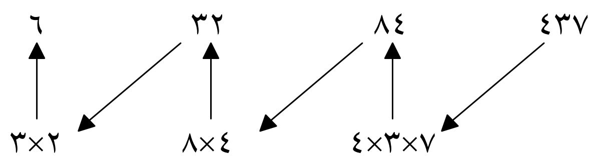
ملحق رقم ١١:

بعض المعارف الرياضيّة حول استمراريّة الأعداد

إذا ضربنا أرقام العدد ع وأعدنا الكرة مع أرقام حاصل الضرب، وهلم جرّاً حتى نصل إلى حاصل ضرب من رقم واحد، فإن عدد المرّات التي قمنا فيها بضرب أرقام الأعداد يسمى استمراريّة العدد ع.

أمثلة:

١) استمراريّة العدد ٤٣٧ هي ٣. الرسم التالي يوضح كيفيّة حساب هذه الاستمرارية.



٢) الجدول التالي يبيّن استمراريّة بعض الأعداد:

العدد	الاستمرارية
١	٠
١٢	١
٣٥	٢
٩٦	٣
٧٦٨	٤
٧٩٦	٥
٩٩٩٨٧٦٦٦٢	٦
٨٦٨٩٨	٧
٧٨٤١٤٧٣٩٢	٨
٧٧٧٧٧٩٩٩٨٨	٩
٣٧٧٨٨٨٨٩٩٩	١٠
٢٧٧٧٧٧٧٨٨٨٨٨٨٩٩	١١

تعريف:

الاستمراريّة أ لعدد طبيعي ع هي أصغر طبيعي ن يحقق اللامعادلة ض$^{(ن)}$(ع) < ١٠، حيث ض(ع) هو حاصل ضرب أرقام العدد ع و ض$^{(ن)}$(ع) هو صورة ع بالدالة ض ذات القوة ن أي ض$^{(ن)}$(ع)= ض (ض(ض(. . .(ع). . .))).

يجدر التذكير هنا أن: ض$^{(١)}$=ض و ض$^{(٠)}$= ذ$_{ط}$ حيث ذ$_{ط}$ (Id_N) هي الدالة على مجموعة الأعداد الطبيعية التي تعطي لكل عدد طبيعي العدد ذاته.

بعض الخصائص:

١) إذا كان العدد ع أصغر من ١٠ يكون أ(ع)=صفر.

٢) إذا كان العدد ع غير مساوٍ لصفر ولكن أحد أرقامه صفر يكون أ(ع)=١.

٣) إذا كان الرقم صفر ليس من أرقام العدد ع بينما الرقم ٥ ورقم مزدوج آخر هي من هذه الأرقام يكون أ(ع)=٢.

٤) إذا كان العددان ع و غ يتألّفان من الأرقام ذاتها (ما عدا الأرقام ١) يكون أ(ع)=أ(غ).

٥) إذا كان العددان ع و غ غير متساويين وإذا كان غ=ض(ع) يكون أ(ع)=أ(غ)+١.

أسئلة مفتوحة:

هل يوجد أعداد ذات استمراريّة أكبر من ١١؟

ماذا عن الاستمراريّة الجمعية؟

ملحق رقم ١٢:

بعض الصفحات والمواقع الالكترونيّة المفيدة

http://mathforum.org/mathed/constructivism.html

http://carbon.cudenver.edu/~mryder/itc_data/constructivism.html

http://www.creativelearning.com/Problemsolving.htm

http://www.mathgoodies.com/articles/problem_solving.html

http://www.recreomath.qc.ca/index.htm

http://www2.umoncton.ca/cfdocs/cami/cami2/index.htm

http://mathforum.org

http://www.carrefour.usherb.ca/amusegueule/aG.html

http://carredas.free.fr/

http://www.bric-a-brac.org/enigmes/

http://www.crocodilus.org

http://www.hawaii.edu/suremath/sites.html

http://www.mathstories.com/

http://www.wits.ac.za/ssproule/pow.htm - نجد على هذا الموقع لائحة بمواقع في باب «مشكلة الأسبوع».

http://www.mcs.drexel.edu/~corres/archimedes/contents.html - نجد على هذه الصفحة مشكلات فيها تحدٍ وتشويق.

www.cmathematique.com/cgi-bin/index.cgi

http://netia59.ac-lille.fr/Ref/pedagogie/Robert_Bibeau/toile.html

http://www.nctm.org/

The Math Forum Teachers' Place - نجد على هذا الموقع موارد لتعليم الرياضيّات لمختلف المراحل

Math Forum: Teacher2Teacher -

تتوافر على هذا الموقع خدمة «سؤال وجواب» متاحة للمعلّمين والأهل الذين لديهم أسئلة تتعلق بتعليم الرياضيّات. كما يتوافر على هذا الموقع أرشيفٌ من الأجوبة، وصفحات من النقاش العام.

المراجع

- المركز التربوي للبحوث والإنماء، ١٩٩٧، «**مناهج التعليم العام وأهدافها**».

- داغر، أنطوان، ٢٠٠٤، «تجربة في تدريب معلّمي الرياضيّات: تغيّر في تصوّرات المعلّمين حول تعليم الرياضيّات وفي ممارستهم التعليميّة»، **الأبحاث التربويّة**، العدد ٢١، كليّة التربية- الجامعة اللبنانيّة، بيروت.

- Becker, J. P. Shimada, S., (Eds.), 1999, "**The Open Ended Approach: A New Proposal for Teaching Mathematics"**, Reston (VA), NCTM.

- Blum, W., & Niss, M., 1991, "Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and Links to Other Subjects - State, Trends and Issues in Mathematics Education", **Educational Studies in Mathematics**, 22, 37-68.

- Borasi, R., 1986, "On the Nature of Problems", **Educational Studies in Mathematics**, 17, 125 - 141.

- CNRDP, 1998, "**Construire les Mathématiques, Septième année, Education de Base**", Beyrouth.

- DeBellis, V., Goldin, A. G., 1997, "The Affective Domain in Mathematical Problem Solving", **Proceedings of the Twenty - first PME Conference**, Vol. 2, 209-216.

- Ernest, P., 1994, "The Philosophy of Mathematics and The

Didactics of Mathematics", in R. Biehler et al. (eds.), **Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline**, 263-276, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.

- Gerofsky, S., 1996, "A linguistic and Narrative View of Word Problems in Mathematics Education", **For the Learning of Mathematics**, 16(2), 36-45.

- Gerofsky, S., & Thomas, R., 1997, "An Exchange about Word Problems", **For the Learning of Mathematics**, 17(2), 21-23.

- Glasersfeld, E. Von, 1994, " Pourquoi le constructivisme doit être radical ? ", **Revue des Sciences de l'Education**, xx (1), 21-27, Canada.

- Glasersfeld E., Von, 1991, "**Radical Constructivism in Mathematics Education"**, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.

- Hashimito, Y., 1997, "The methods of Fostering Creativity through Mathematical Problem Solving", **ZDM,** 29 (3), 86-87.

- Hohn, R. L. & Frey, B., 2002, "Heuristic Training and Performance in Elementary Mathematical Problem Solving", **Journal of Educational Research**, Vol. 95, Issue 6, 374-380.

- Ishii, D. K., 2003,. "Constructivist Views of Learning in Science and Mathematics", ERIC **Digest.** ED482722. Available at the site http://www.ericdigests.org/

- Kantowski, M. G., 1980, "Some Thoughts on Teaching for Problem Solving", in Krulik, S., Reys, R. (Eds.), **Problem Solving in School Mathematics,** National Council of Teachers of Mathematics Yearbook, 195-203.

- Kerka, S., 1997, "Constructivism, Workplace Learning, and Vocational Education ". **ERIC Digest** No. 181. Available at the site http://www.ericdigests.org/

-Kutscher, B., Linchevski, L., 1997, "Number Instantiations as Mediators in Solving Word Problems", **Proceedings of the Twenty-First PME Conference**, Vol. 3, 168-175.

- Laborde, C., 1994, "Working in Small Groups : A Learning

Situation?”, in R. Biehler et al. (eds.) **Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline**, 147-158, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.

- Laing R. A. 1985, “Extending Problem Solving Skills”, **Mathematics teacher**, 78(1), 36-44.

- Lave, J., Smith, S., Butler, M., 1988, “Problem Solving as an Everyday Practice”, in R. I. Charles and A. E. Silver (eds.), **The Teaching and assessing of Mathematical Problem Solving**, 61-71.

- Li Y., 1998, “The Role and Use of Word Problems in School Mathematics “, Learning Research and Development Center, University of Pittsburgh, Available at **http://www.fed.cuhk.edu.hk/~fllee/mathfor/edumath/9806/10li_yp.html**

- Lompscher, J., 1994, “The Sociohistorical School and the Acquisition of Mathematics”, in R. Biehler et al. (eds.) **Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline**, 263-276, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.

- Masingila, J. O. , Moellwald, F. E., 1993, “Using Polya to Foster a Classroom Environment for Real-World Problem Solving”, **School Science and Mathematics**, Vol. 93(5), 245-249.

- MENESR, 2004, Programme de Mathématiques, Classe de sixième, BO, Hors Série No. 5, 9 sept. Disponible sur la page

http://www.education.gouv.fr/bo/2004/hs4/MENE0401470A.htm

- MEQ, 2004, Programme de formation de l’école québécoise, Domaine de la mathématique, de la science et de la technologie, Mathématiques. Disponible sur la page

http://www.meq.gouv.qc.ca/DGFJ/dp/programme_de_formation/secondaire/

- Musser G. and Shaughnessy J., M., 1980, “Problem Solving Strategies in School Mathematics”, in Krulik, S., Reys, R. (Eds.), **Problem Solving in School Mathematics**, 136-145, National Council of Teachers of Mathematics Yearbook.

- NCTM, 1989, “**Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics”**, NCTM, Reston, Va.

- NCTM, 2000, ‘‘**Principles and Standards for School Mathematics’’**, NCTM, Reston, Va. Available at http://standards.nctm.org/document/chapter3/data.htm

- Nohda N., 1995, ‘‘Teaching and Evaluating Using ‘‘Open-Ended Problems’’ in Classroom‘‘, **ZDM**, 27 (2), 57-61.

- Pehkonen E., 1995, **’’**Use of Open-ended Problems‘‘, **ZDM,** 27(2), 55-56.

- Pehkonen, E., 1997, ‘‘The State- of - Art in Mathematical Creativity’’, ZDM, 29 (3), 63-67.

- Philippou, G. N., Christou, C., 1999, ‘‘A Schema-Based Model for Teaching Problem Solving’’, **Proceedings of the Twenty - third PME Conference**, vol. 4, 57-64.

- Piaget, J., 1936, ‘‘**La naissance de l’intelligence chez l’enfant ‘‘**, Neuchatel : Delachux et Niestlé.

- Piaget, J., 1975, ‘‘**l’équilibration des structures cognitives. Problème central du développement’’**, Paris, PUF.

- Polya, G., 1962, ‘‘ **Mathematical Discovery ‘‘**, John Wiley & Sons, London.

- Polya G, 1957, ‘‘**How to Solve it’’**, (2nd edition), Princeton University Press.

- Roh, K. H., 2003. ‘‘Problem-Based Learning in Mathematics’’, **ERIC Digest**. Available at the site http://www.ericdigests.org/

- Schoenfeld, A. H., 1985, ‘‘Mathematical Problem Solving’’, Orlando, FL: Academic Press.

- Schurter, W., 2002, ‘‘Comprehension Monitoring: An Aid to Mathematical Problem Solving’’, **Journal of Developmental Education**, Vol. 26, N. 2, P. 22- 33.

- Silver E.A., 1995, ‘‘The Nature and Use of Open Problems in Mathematics Education: Mathematical and Pedagogical Perspectives’’, ZDM, 27(2), 67-72.

- Toom, A., 1999, ‘‘Word Problems: Applications or Mental Manipulations’’, **For the learning of Mathematics**, 19(1), 36-38.

- Tu, Wei, 1999, "Using Literature To Help Children Cope with Problems".

ERIC Digest D148. Available at the site http://www.ericdigests.org/

- Vergnaud, G., 1990, " La Théorie des Champs Conceptuels ", RDM, vol. 10, 2-3, 133-170.

- Wilson, J. W., Fernandez, M. L., 1993, "Mathematical Problem Solving", in Wilson, P. S. (Ed.) **Research Ideas for the Classroom: High School Mathematics**, New York: MacMillan. Available at http://jwilson.coe.uga.edu/emt725/PSsyn/PSsyn.html